

ZUR ABSCHÄTZUNG DES FEHLERS
BEI HARMONISCHER LINEARISIERUNG
IN NICHTLINEAREN REGELKREISEN

von
Lutz Lambert

Erlangen 1979

ZUR ABSCHÄTZUNG DES FEHLERS BEI HARMONISCHER LINEARISIERUNG IN NICHTLINEAREN REGELKREISEN

Dem Fachbereich Ingenieurwissenschaften
der Universität Erlangen-Nürnberg
zur Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur

vorgelegt von
Lutz Lambert

Erlangen 1979



Als Dissertation genehmigt vom
Fachbereich Ingenieurwissenschaften
der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung: 7.12.1978

Tag der Promotion: 23.02.1979

Dekan: Prof. Dr.-Ing. D. Seitzer

Berichterstatter: Prof. Dr. phil. nat. H. Schlitt

Prof. Dr.-Ing. R. Unbehauen

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Institut für Regelungstechnik der Universität Erlangen - Nürnberg.

Mein Dank gilt

Herrn Prof. Dr. H. Schlitt, dem Vorstand dieses Institutes, für die Anregung zu dieser Arbeit und die mir gewährte Unterstützung,

Herrn Prof. Dr. R. Unbehauen für die Übernahme des Korreferates und

den Kollegen für viele klärende Gespräche.

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

Seite

1	Einleitung	1
2	Harmonische Linearisierung	4
2.1	Herleitung der Beschreibungsfunktion	4
2.2	Harmonische Linearisierung in nichtlinearen Regelkreisen ..	8
3	Analytische Beschreibung der Abweichung bei harmonischer Linearisierung	12
3.1	Erste Näherung der Abweichung	15
3.2	Zweite Näherung der Abweichung mit periodischem System	17
4	Darstellung der parameterverändernden Funktion	25
5	Behandlung von linearen Systemen mit periodisch sich ändernden Parametern	32
5.1	Bestimmung des Frequenzganges	32
5.2	Stabilität	36
6	Stabilitätsuntersuchung beim periodischen System 2. Ordnung	42
6.1	Ermittlung der instabilen Bereiche	43
6.2	Das Verhalten innerhalb und am Rande der instabilen Bereiche	58
7	Stabilität des erregten nichtlinearen Regelkreises	67
7.1	Feststellung nichtlinearer Phänomene	69
7.1.1	Sprungphänomene	70
7.1.2	Sprunghaftes Auftreten der 2. Harmonischen	75
7.1.3	Weitere sprunghafte Signaländerungen	81
7.1.4	Subharmonische	82
8	Abschätzung des Fehlers der harmonischen Linearisierung im Regelkreis	83

	Seite
8.1 Definition	83
8.2 Erste Abschätzung des Fehlers	84
8.3 Zweite Abschätzung des Fehlers	89
9 Anwendung der Fehlerabschätzungen	93
10 Zusammenfassung	105
Literaturverzeichnis	108



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546219_0040

1 EINLEITUNG

Bei zahlreichen Anwendungen der Regelungstechnik, besonders in der Anlagen- und Verfahrenstechnik, besitzen Stellglieder oder Strecken nichtlineares Übertragungsverhalten, das bei der Ermittlung des Regelkreisverhaltens nicht vernachlässigt werden darf. Neben diesen unvermeidbaren Nichtlinearitäten werden aber auch bewußt nichtlineare Übertragungsglieder eingebracht, um ein bestimmtes Regelkonzept zu erzielen. In vielen Fällen kann sich die Behandlung auf eine wesentliche Nichtlinearität beschränken, deren Übertragung durch eine statische Kennlinie zwischen ihrem Ein- und Ausgangssignal darstellbar sein soll. Die linearen dynamischen Teilsysteme des Regelkreises werden dann zu dem "Linearteil" zusammengefaßt.

Die Bestimmung des Übertragungsverhaltens harmonisch geführter oder gestörter nichtlinearer Regelkreise und die Feststellung einer Selbsterregung wird häufig bezüglich der Grundschiwingung vorgenommen. Dadurch können Methoden der linearen Systemtheorie angewendet werden, die den Aufwand der Ermittlung im allgemeinen erheblich reduzieren. Die Übertragung der Grundschiwingung durch die Nichtlinearität wird mit der Beschreibungsfunktion gekennzeichnet, die man durch eine harmonische Linearisierung der Nichtlinearität gewinnt. Eine kurze Darstellung der Behandlung solcher harmonisch linearisierter Regelkreise erfolgt im Kapitel 2.

Mit dem harmonisch linearisierten Regelkreis gewinnt man harmonische Näherungen der Signale des nichtlinearen Regelkreises. Eine Abweichung entsteht einerseits direkt durch die Oberwellen, die andererseits zur Folge haben, daß die Beschreibungsfunktion das Übertragungsverhalten der Nichtlinearität bzgl. der Grundschiwingung nicht richtig kennzeichnet, da sie für harmonische Erregung definiert ist. Um den Linearisierungsfehler klein zu halten, ist von P. POPOW, J. PALTOW und anderen festgestellt worden, daß die von der Nichtlinearität erzeugten Oberwellen durch den nachfolgenden Linearteil "herausgefiltert" werden müssen, was in der bekannten "Tiefpaßforderung" für den Linearteil zum Ausdruck kommt. Eine Rückwirkung der Oberwellen über die Nichtlinearität ist bei dieser Betrachtung vernachlässigt worden. Untersuchungen am Analogrechner haben jedoch gezeigt, daß der Einfluß der Rückwirkung auf die Ausbildung der Oberwellen teilweise erheblich ist. Außerdem

läßt sich für fremderregte Regelkreise nachweisen, daß trotz Verwendung ungerader nichtlinearer Kennlinien geradzahlige Oberwellen auftreten, was ohne Beachtung der Rückwirkung nicht erklärt werden kann.

Ziel dieser Arbeit ist es, den Fehler der harmonischen Linearisierung unter Berücksichtigung der Rückwirkung mit einer Tangentennäherung in den angesteuerten Punkten der nichtlinearen Kennlinie zu ermitteln. Dabei ist eine Beschränkung auf Nichtlinearitäten mit differenzierbarer Kennlinie erforderlich, die außerdem nullpunktsymmetrisch sein soll. Ferner wird die Betrachtung auf die gesamte Abweichung zwischen den Ausgangssignalen des nichtlinearen und harmonisch linearisierten Regelkreises ausgedehnt, wodurch die fehlerhafte Kennzeichnung der Grundschwingung mit erfaßt wird. Diese Abweichung erhält man als Ausgangssignal eines periodisch zeitvarianten linearen Systems, das von den Oberwellen der harmonisch angesteuerten Nichtlinearität erregt wird. Die Übertragung dieses periodischen Systems kann wie bei zeitinvarianten Systemen durch einen Frequenzgang beschrieben werden. Seine Ermittlung ist zwar erheblich aufwendiger als im zeitinvarianten Fall, jedoch stehen heute effektive Methoden für eine rechnergestützte Bestimmung zur Verfügung. Die Verwendung des Frequenzganges bei der Berechnung des Ausgangssignals setzt die Stabilität des periodischen Systems voraus, so daß außerdem eine Stabilitätsprüfung vorzunehmen ist. Die analytische Herleitung des periodischen Systems erfolgt in den Kapiteln 3 und 4, während seine Übertragungsfunktion und einige Stabilitätskriterien im Kapitel 5 dargestellt werden.

Mit der Stabilitätsuntersuchung dieses periodischen Systems wird gleichzeitig geklärt, ob der erregte nichtlineare Regelkreis stabil sein kann. Darüber hinaus ist es mit der Kenntnis der Eigenbewegungen des zeitvarianten Systems bei Instabilität möglich, auf bestimmte nichtlineare Phänomene des fremderregten Regelkreises zu schließen. Das wird bei Regelkreisen mit einem Linearteil 2. Ordnung näher behandelt.

Im Kapitel 6 werden zu diesem Zweck für das periodische System 2. Ordnung die instabilen Bereiche und die Perioden der periodischen Komponenten bei den hier aufklingenden Schwingungen ermittelt. Außerdem wird festgestellt, welche Harmonische in den periodischen Komponenten dominiert.

Mit diesen Ergebnissen lassen sich beim nichtlinearen Regelkreis Sprungphänomene feststellen, sowie sprunghafte Änderungen ungeradzahliger Oberwellen und die Ausbildung geradzahliger Oberwellen trotz nullpunktsymmetrischer Kennlinie der Nichtlinearität erklären, worauf im Kapitel 7 eingegangen wird.

Für die Ermittlung des Fehlers der harmonischen Linearisierung auf der Grundlage der dargestellten erweiterten Beschreibung der Abweichung mit dem periodischen System sind im Kapitel 8 Beziehungen hergeleitet, die sich unmittelbar zur numerischen Auswertung verwenden lassen. An zwei Beispielen wird im Kapitel 9 dargelegt, welche Verbesserung sich mit dieser Fehlerabschätzung erzielen läßt.

2. HARMONISCHE LINEARISIERUNG

Die "harmonische Linearisierung" geht im wesentlichen auf drei Arbeiten zurück. KRYLOW und BOGOLJUBOW führten 1937 /1/ die Methode der "Harmonischen Balance" ein, mit der sie Oszillationen nichtlinearer Systeme durch harmonische Lösungsansätze ermittelten. GOLDFARB gab 1947 /2/ bei statischen Nichtlinearitäten das Übertragungsverhalten bzgl. der Harmonischen an und führte mit diesen "äquivalenten Kenngrößen" Stabilitätsuntersuchungen durch. KOCHENBURGER prägte 1950/3/ den Begriff "Beschreibungsfunktion" für das Übertragungsmaß eines nichtlinearen Systems bzgl. der Grundschwingung und betrachtete damit Servosysteme. Von den verschiedenen Kennzeichnungen hat sich in der Literatur die Bezeichnung "Beschreibungsfunktion" bei der "harmonischen Linearisierung" durchgesetzt. Daneben wird bei Stabilitätsbetrachtungen vornehmlich von "Harmonischer Balance" gesprochen.

In der Folgezeit sind in einer Fülle von Arbeiten die ersten Ansätze weiter auf Nichtlinearitäten mit mehrdeutigen oder unsymmetrischen Kennlinien und Eingangssignalen mit Mittelwerten ausgebaut worden. Auch auf die Überlagerung von mehreren Signalen am Eingang der Nichtlinearität hat man die Methode der Linearisierung erweitert, wobei allerdings der Aufwand erheblich ist. Die unter bestimmten Voraussetzungen guten Ergebnisse und die Möglichkeit, Methoden der linearen Systemtheorie mit einzubeziehen, haben dazu geführt, daß die "harmonische Linearisierung" bei der Behandlung nichtlinearer Systeme eine große Bedeutung erlangt hat.

2.1 Herleitung der Beschreibungsfunktion

Berücksichtigt werden

- mittelwertfreie harmonische Eingangssignale und
- Nichtlinearitäten mit nullpunktsymmetrischen Kennlinien, die hysteresebehaftet sein können und invariant gegenüber einer Zeittransformation des Eingangssignals sind.

Beschreibt

$$y(t) = f[x(t), \dot{x}(t)] \quad (2.1)$$

den nichtlinearen Zusammenhang zwischen dem Eingangssignal $x(t)$, dessen Ableitung $\dot{x}(t)$ und dem Ausgangssignal $y(t)$ einer Nichtlinearität, dann ist mit

$$\hat{y}(t) = \alpha x(t) + \beta \dot{x}(t) \quad (2.2)$$

eine lineare Näherung gegeben. Minimieren die Koeffizienten α und β die Abweichung

$$v(t, \alpha, \beta) = f[x(t), \dot{x}(t)] - \alpha x(t) - \beta \dot{x}(t) \quad (2.3)$$

im quadratischen Mittel, so ist (2.2) mit diesen optimalen Koeffizienten die "harmonische Linearisierung" der sinusförmig erregten Nichtlinearität.

Der quadratische Mittelwert $V(\alpha, \beta)$ der mit der Periode T zeitabhängigen Abweichung $v(t, \alpha, \beta)$ ist durch

$$V(\alpha, \beta) = \frac{1}{T} \int_0^T v^2(t, \alpha, \beta) dt \quad (2.4)$$

gegeben. Notwendige Bedingung für ein Minimum von $V(\alpha, \beta)$ ist das Verschwinden der partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial V(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial V(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0 \quad (2.5)$$

Ersetzt man v im Integranden von (2.4) durch (2.3) und führt nach dem Quadrieren die zeitliche Mittelung gliedweise aus, so erhält man, da wegen der Orthogonalität von $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ der Term

$$\frac{1}{T} \int_0^T 2\alpha\beta x(t) \dot{x}(t) dt = 0$$

ist, den quadratischen Mittelwert von v zu

$$V(\alpha, \beta) = \overline{y^2(t)} + \alpha^2 \overline{x^2(t)} + \beta^2 \overline{\dot{x}^2(t)} - 2\alpha \overline{x(t)y(t)} - 2\beta \overline{\dot{x}(t)y(t)}, \quad (2.6)$$

wobei die Überstreichung die zeitliche Mittelung bedeutet. Anhand von (2.6) erkennt man, daß die Bedingung (2.5) zugleich hinreichend ist, da das Extremum der Funktion $V(\alpha, \beta)$ wegen $\overline{x^2(t)} > 0$ und $\overline{\dot{x}^2(t)} > 0$ stets ein Minimum ist. Außerdem besitzt $V(\alpha, \beta)$ nur ein Minimum, da $\frac{\partial V(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}$ bzw. $\frac{\partial V(\alpha, \beta)}{\partial \beta}$ lineare Funktionen von α bzw. β sind. Es gibt demnach keine weitere Näherung mit dem linearen Ansatz (2.2), deren mittlerer quadratischer Fehler kleiner wäre.

Durch Anwendung der Bedingung (2.5) auf (2.6) ergeben sich die optimalen Koeffizienten zu

$$\alpha_{op} = \frac{\overline{x(t) \cdot y(t)}}{\overline{x^2(t)}} \quad (2.7a)$$

und

$$\beta_{op} = \frac{\overline{\dot{x}(t) \cdot y(t)}}{\overline{\dot{x}^2(t)}} \quad , \quad (2.7b)$$

woraus mit dem Eingangssignal $x(t) = x_0 \sin \omega t$ schließlich

$$\alpha_{op} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin \omega t \, dt \quad (2.8a)$$

und

$$\beta_{op} = \frac{1}{x_0 \omega} \cdot \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos \omega t \, dt \quad (2.8b)$$

mit $T = \frac{2\pi}{\omega}$ folgt.

Die "Beschreibungsfunktion" kann als Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangssignal des linearen Ersatzsystems (2.2) mit den nach (2.8) ermittelten optimalen Koeffizienten bei Erregung mit der harmonisch Exponentiellen definiert werden /4/:

$$N(x_0) = \left. \frac{\tilde{y}(t)}{x(t)} \right|_{x(t)=x_0 e^{j\omega t}} \quad (2.9)$$

Sie hängt im allgemeinen von der Aussteuerung der Nichtlinearität, also von der Eingangsamplitude x_0 ab; sie ist aber unabhängig von der

Frequenz mit den eingangs getroffenen Voraussetzungen. Bei hysteresee-behafteten Nichtlinearitäten wird die Beschreibungsfunktion komplex:

$$N(x_0) = N_R(x_0) + j N_I(x_0) . \quad (2.10)$$

Zwischen der Beschreibungsfunktion und den optimalen Koeffizienten besteht der Zusammenhang

$$N(x_0) = \alpha_{0p}(x_0) + j \omega \beta_{0p}(x_0) , \quad (2.11)$$

der sich durch Substitution von $\hat{y}(t)$ in (2.9) durch (2.2) ergibt.

Die Bestimmungsgleichungen (2.8) weisen noch auf eine andere Formulierung hin. Danach sind Real- und Imaginärteil der Beschreibungsfunktion gleich den Fourierkoeffizienten der Grundschiwingung von $y(t)$ dividiert durch die Amplitude x_0 des Eingangssignals.

Betrachtet man die Näherung $\hat{y}(t)$ als Antwort eines Ersatzsystems mit dem Operator $S[\cdot]$ auf das Eingangssignal $x(t) = x_0 \sin \omega t$,

$$\hat{y}(t) = S[x(t)] = \alpha_{0p}(x_0) \cdot x(t) + \beta_{0p}(x_0) \cdot \dot{x}(t) , \quad (2.12)$$

so kann diesem System wegen der x_0 -Abhängigkeit nicht die Eigenschaft der Linearität zugeschrieben werden. Andererseits verhält sich das Ersatzsystem für eine bestimmte Amplitude x_0 des Eingangssignals wie ein lineares System. Wegen dieser Besonderheit spricht man allgemein vom "quasilinearen" Ersatzsystem.

Um den quasilinearen Charakter auch im Blockschaltbild zu betonen, wird im Unterschied zum linearen bzw. nichtlinearen System, das durch einen Block mit einfacher bzw. doppelter Umrandung dargestellt wird, die innere Umrandung des Blockes für das quasilineare System gestrichelt ausgeführt, Bild 2.1.



Bild 2.1

Durch Einsetzen der optimalen Koeffizienten (2.7) in (2.6) erhält man den mittleren quadratischen Approximationsfehler V der harmonischen Linearisierung zu

$$V = \overline{y^2(t)} - (\alpha_{0\rho}^2 + \omega^2 \beta_{0\rho}^2) \frac{x_0^2}{2}, \quad (2.13)$$

woraus mit (2.11)

$$V = \overline{y^2(t)} - |N(x_0)|^2 \frac{x_0^2}{2} \quad (2.14)$$

folgt.

2.2 Harmonische Linearisierung in nichtlinearen Regelkreisen

Bei zahlreichen Anwendungen der Regelungstechnik, besonders in der Anlagen- und Verfahrenstechnik, besitzen Strecken nichtlineare Übertragungsglieder, die bei der Ermittlung des Regelkreisverhaltens nicht vernachlässigt werden können. Übertragungsglieder mit Begrenzung oder toter Zone, eventuell noch mit Hysterese, treten dabei am häufigsten auf. Neben diesen unvermeidbaren Nichtlinearitäten werden aber auch bewußt nichtlineare Übertragungsglieder in den Regelkreis eingebracht, z.B. durch schaltende Regler, um ein bestimmtes Regelverhalten zu erzielen. Nichtlinearitäten können einfach oder mehrfach im Regelkreis auftreten. Man kann sich aber häufig auf eine wesentliche Nichtlinearität beschränken, was auch hier für die weitere Behandlung vorausgesetzt werden soll. Ferner werden nur solche Fälle betrachtet, bei denen das nichtlineare Übertragungsverhalten in Form einer statischen Kennlinie separiert werden kann. Dann ist es üblich /4,5/, den einläufigen Regelkreis durch eine Blockstruktur mit zwei Blöcken im Vorwärtszweig darzustellen, von denen der erste die nichtlineare statische Übertragungskennlinie und der zweite alle linearen dynamischen Übertragungsglieder des Regelkreises repräsentiert, Bild 2.1.

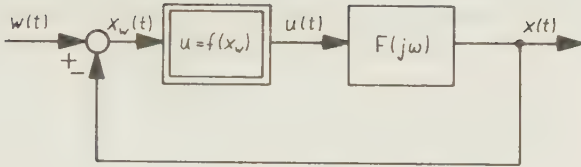


Bild 2.1

Dieser sogenannte "nichtlineare Standardregelkreis" steht stellvertretend für alle diejenigen Regelkreise, die sich durch Strukturumwandlung auf diese Form bringen lassen. Im ersten Block wird im allgemeinen die Kennlinie oder Funktion der Nichtlinearität und im zweiten der Frequenzgang des Linearteils angegeben.

Zur Feststellung einer Selbsterregung und bei der Ermittlung des Übertragungsverhaltens von harmonisch gestörten oder geführten Regelkreisen, also in den Fällen, wo mit einem harmonischen bzw. genähert harmonischen Signal am Eingang der Nichtlinearität gerechnet werden kann, wird nun die Übertragung der Nichtlinearität durch die Beschreibungsfunktion gekennzeichnet, und man erhält den harmonisch linearisierten Regelkreis, Bild 2.2.

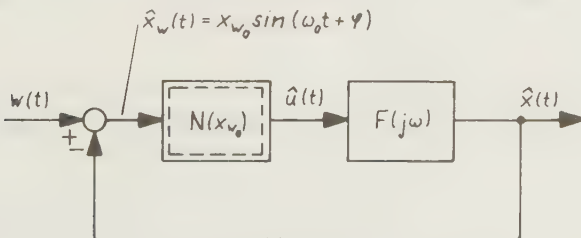


Bild 2.2

Bei ihm sind die Signale natürlich nur Näherungen der entsprechenden des nichtlinearen Kreises, weswegen sie mit einem Dach versehen worden sind. Unter welchen Voraussetzungen diese harmonischen Näherungen befriedigende Approximationen darstellen, wird später noch ausführlich behandelt.

Nach der harmonischen Linearisierung des Regelkreises kann man die Übertragung eines harmonischen Signals mit konstanter Amplitude wie bei einem linearen System angeben. Dabei ist zu beachten, daß die Beschreibungsfunktion von der Amplitude x_{w_0} ihres Eingangssignals abhängt.

Zur Feststellung einer periodischen Selbsterregung wird die "Gleichung der harmonischen Balance"

$$1 + N(x_{w_0}) \cdot F(j\omega) = 0 \quad (2.15)$$

aufgestellt. Während im linearen Fall nur untersucht zu werden braucht, ob die Gleichung mit einer bestimmten Kreisfrequenz ω_0 erfüllt wird, muß hier noch die Amplitude x_{w_0} berücksichtigt werden. Dabei können durchaus mehrere Wertepaare (x_{w_0}, ω_0) diese Gleichung befriedigen. Die zur Ermittlung der zwei Unbekannten x_{w_0} und ω_0 erforderlichen Gleichungen erhält man durch Aufspaltung von (2.15) in eine Real- und Imaginärteilgleichung. Für eine graphische Lösung von (2.15) ist in der Literatur mit dem "Zweiortskurvenverfahren", z.B. /5,6/, bei dem $-1/N(x_{w_0})$ und $F(j\omega)$ oder $N(x_{w_0})$ und $-1/F(j\omega)$ in einer komplexen Ebene mit der Amplitude x_{w_0} und der Kreisfrequenz ω als Parameter dargestellt werden, eine geeignete Methode angegeben worden. Bei periodischer Selbsterregung spricht man auch von der Existenz einer "Grenzschwingung" oder eines "Grenzzyklusses".

Wie im linearen Fall läßt sich auch das Übertragungsverhalten des linearisierten Regelkreises bezüglich der harmonischen Erregung $w(t) = w_0 \sin \omega t$, also der Führungsfrequenzgang, angeben:

$$F(j\omega, x_{w_0}) = \frac{N(x_{w_0}) F(j\omega)}{1 + N(x_{w_0}) F(j\omega)} \quad (2.16)$$

Die über die Beschreibungsfunktion eingebrachte unbekannte Amplitude x_{w_0} muß dabei zusätzlich bestimmt werden, was durch Berücksichtigung ihrer Abhängigkeit von der Amplitude w_0 des Führungssignals gelingt. Mit dem Amplitudenfrequenzgang des Regelkreises bezüglich der Regelabweichung $\tilde{x}_w(t)$ * folgt:

$$x_{w_0} = \frac{1}{|1 + N(x_{w_0}) F(j\omega)|} w_0 \quad (2.17)$$

Diese Gleichung ist im allgemeinen nicht nach x_{w_0} auflösbar, so daß sie nur graphisch oder numerisch gelöst werden kann. Eine Reihe von graphischen Methoden sind in der Literatur angegeben worden, wovon das "Ellipsenverfahren" von LEVINSON /7/ für reelle Beschreibungsfunktionen und das "Kreisverfahren" von WEDLAKE /8/ für komplexe erwähnt seien. Numerische Lösungen sind ebenfalls ohne großen Aufwand mit einem Tischrechner durchführbar. Für bestimmte Amplituden w_0 können dabei drei verschiedene Lösungen x_{w_0} auftreten. Das führt zu sogenannten "Sprungphänomenen", die später⁰ noch eingehend behandelt werden.

* Abweichend von den Vorschlägen nach DIN 19 226 wurde die "Regeldifferenz" $x_d = w - x$ mit "Regelabweichung" x_w bezeichnet.

3 ANALYTISCHE BESCHREIBUNG DER ABWEICHUNG BEI HARMONISCHER LINEARISIERUNG

Mit dem harmonisch linearisierten Regelkreis erhält man Näherungslösungen der Signale des nichtlinearen Regelkreises. Die harmonischen Näherungen werden dabei um so besser mit den Signalen des nichtlinearen Kreises übereinstimmen, je kleiner ihr Oberwellenanteil im Vergleich zur Grundschiwingung ist, was wiederum von den Kennwerten der Nichtlinearität, des Linearteils und der Eingangserregung abhängt. In welcher Weise diese Kennwerte eingehen, wird die Ermittlung der Abweichung zwischen den genäherten und exakten Signalen zeigen.

Die Abweichung zwischen den Regelgrößen des nichtlinearen und linearisierten Regelkreises $x(t)$ und $\bar{x}(t)$ sei bezeichnet mit

$$\varepsilon(t) = x(t) - \bar{x}(t) . \quad (3.1)$$

Zwischen den Regelabweichungen $x_w(t)$ und $\bar{x}_w(t)$ besteht bis aufs Vorzeichen die selbe Differenz; denn mit den Beziehungen der Mischstellen

$$x_w(t) = w(t) - x(t) \quad (3.2)$$

und

$$\bar{x}_w(t) = w(t) - \bar{x}(t) \quad (3.3)$$

folgt durch Subtraktion

$$x_w(t) - \bar{x}_w(t) = - [x(t) - \bar{x}(t)] = -\varepsilon(t) \quad (3.4)$$

Die Ermittlung der Abweichung $\varepsilon(t)$ wird im Zeitbereich vorgenommen. Daher wird der Linearteil im Zustandsraum durch

$$\dot{\underline{z}}(t) = \underline{A} \underline{z}(t) + \underline{b} u(t) \quad (3.5a)$$

$$x(t) = \underline{c}^T \underline{z}(t) \quad (3.5b)$$

beschrieben. Hierin sind $\underline{A}$ die n -reihige quadratische Systemmatrix, $\underline{z}$ der Zustands-, $\underline{b}$ der Steuerungs- und $\underline{c}^T$ der Beobachtungsvektor aus m Komponenten ($m \leq n-1$). Während $\underline{z}$ und $\underline{b}$ Spaltenvektoren sind, ist $\underline{c}^T$

dagegen ein Zeilenvektor, was durch das hochgestellte T (von "transponieren") an $\underline{c}$ zum Ausdruck kommen soll. Ein eventueller Durchgriff beim Linearteil kann der Nichtlinearität zugeordnet werden. Es wird vorausgesetzt, daß die Systemmatrix A nur Eigenwerte mit negativem Realteil besitzt, bis auf einen, dessen Real- und Imaginärteil dann aber gleich Null sein sollen. Integrierende Linearteile sind also zugelassen.

Die Nichtlinearität wird beschrieben durch die eindeutige Kennlinie

$$u = f(x_w) . \quad (3.6)$$

Auf Kennlinien mit Hysterese wird später noch eingegangen.

Mit (3.5), (3.6) und der Verknüpfung

$$x_w(t) = w(t) - x(t)$$

durch die Mischstelle ist der nichtlineare Regelkreis, Bild 2.1, im Zeitbereich vollständig beschrieben.

Beim harmonisch linearisierten Regelkreis, Bild 2.2., steht anstelle der Nichtlinearität das durch die Beschreibungsfunktion $N(x_{w0})$ gekennzeichnete quasilineare Ersatzsystem mit der Übertragungsgleichung

$$\hat{u}(t) = N(x_{w0}) \hat{x}_w(t) . \quad (3.7)$$

Der Linearteil erhält im linearisierten Kreis die Näherung $\hat{u}(t)$ als Eingangssignal, so daß seine Zustandsgleichungen hier mit den genäher-ten Signalen anzugeben sind:

$$\dot{\hat{z}}(t) = \underline{A} \hat{z}(t) + \underline{b} \hat{u}(t) \quad (3.8a)$$

$$\hat{x}(t) = \underline{c}^T \hat{z}(t) . \quad (3.8b)$$

Dasselbe gilt für die Mischstelle des linearisierten Regelkreises:

$$\hat{x}_w(t) = w(t) - \hat{x}(t) .$$

Das Führungssignal $w(t)$ bleibt natürlich unverändert.

Die gesuchten Gleichungen für die Abweichung $\varepsilon(t)$ erhält man nun, indem (3.8a) von (3.5a) sowie (3.8b) von (3.5b) abgezogen und $\varepsilon(t)$ über (3.1) eingeführt wird:

$$\dot{\underline{z}} - \dot{\underline{\bar{z}}} = \underline{A} (\underline{z} - \underline{\bar{z}}) + \underline{b} (u - \bar{u}) \quad (3.9 a)$$

$$\varepsilon = \underline{c}^T (\underline{z} - \underline{\bar{z}}) . \quad (3.9 b)$$

Führt man ferner für die Differenz $\underline{z} - \underline{\bar{z}}$ der Zustandsvariablen $\underline{z}$ und $\underline{\bar{z}}$ die neue Zustandsgröße

$$\underline{q} = \underline{z} - \underline{\bar{z}} \quad (3.10)$$

ein und ersetzt u und $\bar{u}$ durch (3.6) und (3.7), so folgt:

$$\dot{\underline{q}} = \underline{A} \underline{q} + \underline{b} \left[f(x_w) - N(x_{w0}) \bar{x}_w \right] \quad (3.11 a)$$

$$\varepsilon = \underline{c}^T \underline{q} . \quad (3.11 b)$$

Die Ermittlung der Abweichung ε muß selbstverständlich ohne Kenntnis der exakten Lösung x_w , die in (3.11a) als Argument der Funktion $f(x_w)$ erscheint, auskommen, da x_w nur mit großem numerischen Aufwand zu bestimmen ist. Dagegen läßt sich die Näherungslösung $\bar{x}_w$ vergleichsweise einfach berechnen. Im übrigen wäre mit Kenntnis von x_w und $\bar{x}_w$ die Ermittlung von ε über (3.4) trivial. Es wird daher x_w durch die aus (3.4) folgende Beziehung

$$x_w = \bar{x}_w - \varepsilon \quad (3.12)$$

substituiert und man erhält:

$$\dot{\underline{q}} = \underline{A} \underline{q} + \underline{b} \left[f(\bar{x}_w - \varepsilon) - N(x_{w0}) \bar{x}_w \right] \quad (3.13 a)$$

$$\varepsilon = \underline{c}^T \underline{q} . \quad (3.13 b)$$

Vergleicht man dieses Gleichungssystem mit den Zustandsgleichungen (3.5) des Linearteils, so kann ε als Reaktion des Linearteils auf das Ein-

gangssignal $f(\bar{x}_w - \varepsilon) - N(x_{w0})\bar{x}_w$ betrachtet werden. Dabei existiert eine Rückwirkung des Ausgangssignals ε über die Nichtlinearität auf den Eingang. Wegen dieser Rückwirkung wird sich selbst eine numerische Lösung nur mit größerem Aufwand angeben lassen. Es werden deshalb Vernachlässigungen getroffen, mit denen dann Näherungslösungen vergleichsweise leicht bestimmt werden können.

3.1 Erste Näherung der Abweichung

In der Literatur wird allgemein angenommen, z.B. /9,10,11/, daß die Rückwirkung von $\varepsilon(t)$ über die Nichtlinearität in (3.13) bei der Ermittlung der Bedingungen für eine geringe Abweichung $\varepsilon(t)$ vernachlässigt werden kann. Mit dieser Annahme

$$f(\bar{x}_w - \varepsilon) \approx f(\bar{x}_w) \quad (3.14)$$

folgt aus der Beschreibung (3.13) der exakten Abweichung ε die ihrer 1. Näherung $\hat{\varepsilon}_1$:

$$\dot{\hat{q}}_1 = \underline{A} \hat{q}_1 + \underline{b} [f(\bar{x}_w) - N(x_{w0})\bar{x}_w] \quad (3.15a)$$

$$\hat{\varepsilon}_1 = \underline{c}^T \hat{q}_1. \quad (3.15b)$$

Die in (3.13) bestehende Rückwirkung tritt hier nicht mehr in Erscheinung. Betrachtet man die Erregung

$$v(t) = f(\bar{x}_w) - N(x_{w0})\bar{x}_w, \quad (3.16)$$

so stellt man fest, daß sie sich aus der Gesamtheit der Oberwellen des Ausgangssignals der mit der harmonischen Lösung $\bar{x}_w(t) = x_{w0} \sin(\omega_0 t + \varphi)$ angesteuerten Nichtlinearität zusammensetzt, d.h. es ist

$$v(t) = \sum_{\substack{\nu = -\infty \\ \nu \neq 0, \pm 1}}^{+\infty} \beta_{\nu} e^{j\nu\omega_0 t} \quad (3.17a)$$

mit

$$\beta_{\nu} = \frac{1}{T} \int_0^T f[\bar{x}_w(t)] e^{-j\nu\omega_0 t} dt \quad (T = \frac{2\pi}{\omega_0}) \quad (3.17b)$$

Zusammenfassend kann man feststellen, daß die 1. Näherung $\hat{\varepsilon}_1(t)$ der Abweichung $\varepsilon(t)$ als Antwort des Linearteils auf den Verzerrungsanteil $v(t)$ der mit $\bar{x}_w(t)$ erregten Nichtlinearität betrachtet werden kann, Bild 3.1.

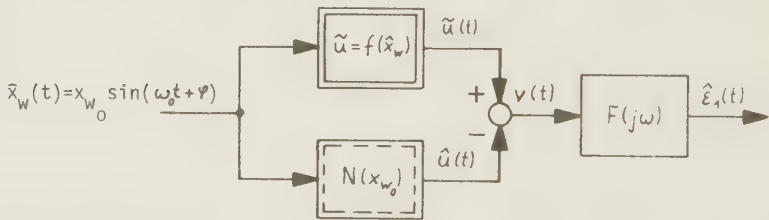


Bild 3.1

Mit Hilfe des Frequenzganges $F(j\omega)$ des Linearteils ergibt sich

$\hat{\varepsilon}_1(t)$ zu:

$$\hat{\varepsilon}_1(t) = \sum_{\substack{\nu = -\infty \\ \nu \neq 0, \pm 1}}^{+\infty} F(j\nu\omega_0) \beta_{\nu} e^{j\nu\omega_0 t} \quad (3.18)$$

Haben die Nichtlinearitäten nullpunktsymmetrische Kennlinien, worauf sich diese Arbeit beschränkt, so sind die Koeffizienten β_{ν} nur bei ungeradzahligem ν ungleich Null, und die 1. Näherung $\hat{\varepsilon}_1(t)$ der Abweichung $\varepsilon(t)$ enthält nur Harmonische mit den Kreisfrequenzen $3\omega_0$, $5\omega_0$, $7\omega_0$ usw..

3.2 Zweite Näherung der Abweichung mit periodischem System

Die zweite Näherung $\hat{\varepsilon}_2(t)$ von $\varepsilon(t)$ wird dadurch erzielt, daß die Übertragung von ε durch die Nichtlinearität in (3.13a) näherungsweise Berücksichtigung findet. Entwickelt man $f(\bar{x}_w - \varepsilon)$ als Taylorreihe um die Näherungslösung $\bar{x}_w$, so gilt

$$f(\bar{x}_w - \varepsilon) = f(\bar{x}_w) + f'(\bar{x}_w) \frac{-\varepsilon}{1!} + f''(\bar{x}_w) \frac{\varepsilon^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(\bar{x}_w) \frac{(-\varepsilon)^n}{n!} + \dots \quad (3.19)$$

Dazu muß die Kennlinie $f(\bar{x}_w)$ der Nichtlinearität beliebig oft differenzierbar sein. Verwendet man nun bei der Ermittlung der 2. Näherung $\hat{\varepsilon}_2$ von ε für $f(\bar{x}_w - \varepsilon)$ die Taylorreihe (3.19) bis zum 2. Glied, dann hat man gegenüber der 1. Näherung eine Erweiterung um das lineare Glied $f'(\bar{x}_w)\varepsilon$ vorgenommen:

$$f(\bar{x}_w - \varepsilon) \approx f(\bar{x}_w) - f'(\bar{x}_w)\varepsilon \quad (3.20)$$

Diese Tangentennäherung ist um so genauer, je kleiner der Effektivwert von ε gegenüber den Krümmungsradien der Nichtlinearität ist. Man erhält die Beschreibung für die 2. Näherung $\hat{\varepsilon}_2$ von ε , indem $f(\bar{x}_w - \varepsilon)$ in (3.13a) durch (3.20) substituiert wird:

$$\hat{\bar{q}}_2 = \underline{A} \bar{q}_2 + \underline{b} \left[f(\bar{x}_w) - f'(\bar{x}_w) \hat{\varepsilon}_2 - N(x_{w0}) \bar{x}_w \right] \quad (3.21a)$$

$$\hat{\varepsilon}_2 = \underline{c}^T \bar{q}_2 \quad (3.21b)$$

Aufgrund der Tangentennäherung kann man davon ausgehen, daß bei genügend kleinem Effektivwert von ε die genäherte Beschreibung (3.21) in die exakte (3.13) übergeht. Da andererseits in (3.21) über $f'(\bar{x}_w)\hat{\varepsilon}_2$ eine Rückwirkung des Ausgangssignals $\hat{\varepsilon}_2$ auf den Eingang vorliegt, muß der bisherigen Auffassung, bei kleiner Abweichung ε könne man die Rückwirkung vernachlässigen, widersprochen werden. Es ist vielmehr festzustellen, daß dann die Rückwirkung wie in (3.21) erfolgt.

Ein Vergleich von (3.21) mit (3.15) zeigt, daß sich (3.21) nur durch den Rückführterm $f'(\bar{x}_w)\hat{\varepsilon}_2$ von (3.15) unterscheidet. Daher kann die

2. Näherung $\hat{e}_2(t)$ ebenfalls als Antwort des jetzt zusätzlich gegengekoppelten Linearteils auf den Verzerrungsanteil $v(t)$ der Nichtlinearität betrachtet werden, wobei das rückgeführte Signal wegen der Zeitabhängigkeit des Rückführkoeffizienten $f'[\hat{x}_w(t)]$ in modulierter Form vorliegt, Bild 3.2.

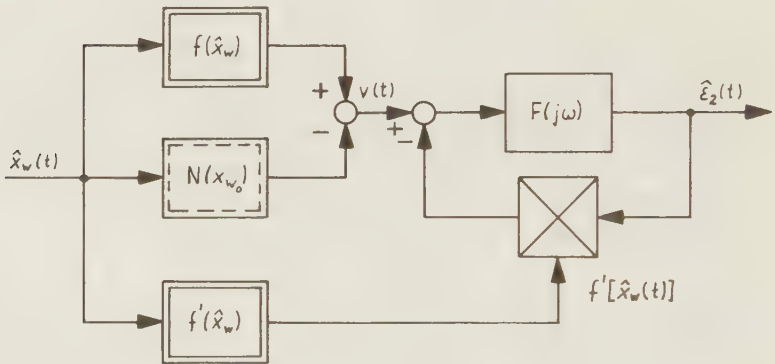


Bild 3.2

Wie aus dem Blockschaltbild 3.2 hervorgeht, erfolgt die Modulation des rückgeführten Ausgangssignals $\hat{e}_2$ mit einem periodischen Signal. Der modulierte gegengekoppelte Linearteil ist also ein periodisch zeitvariantes System. Hat $\hat{x}_w(t) = x_w \sin(\omega_0 t + \varphi)$ die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ und ist voraussetzungsgemäß $f(\hat{x}_w)$ eine ungerade und damit $f'(\hat{x}_w)$ eine gerade Funktion, so folgt für die modulierende Funktion $f'[\hat{x}_w(t)]$ die Periode

$$T_p = \frac{T}{2} \quad (3.22)$$

Für die spätere Behandlung ist eine Beschreibung des rückgeführten Systems (3.21) durch Zustandsgleichungen erforderlich. Man erhält sie, indem $\hat{e}_2$ in (3.21a) durch (3.21b) substituiert wird. Setzt man ferner $v(t)$ für $f(\hat{x}_w) - N(x_{w0})\hat{x}_w$, so folgt insgesamt

$$\dot{\hat{q}}_2 = [A - f'(\bar{x}_w) \underline{b} \underline{c}^T] \hat{q}_2 + \underline{b} v \quad (3.23a)$$

$$\hat{\varepsilon}_2 = \underline{c}^T \hat{q}_2 . \quad (3.23b)$$

Dieses System hat wegen $\bar{x}_w = \bar{x}_w(t)$ eine zeitabhängige Matrix

$$\underline{A}_p(t) = \underline{A} - f'[\bar{x}_w(t)] \underline{b} \underline{c}^T . \quad (3.24)$$

Da die parameterverändernde Funktion

$$h(t) = f'[\bar{x}_w(t)] \quad (3.25)$$

periodisch mit der Periode T_p von der Zeit abhängt, gilt das auch für die Systemmatrix:

$$\underline{A}_p(t + T_p) = \underline{A}_p(t) . \quad (3.26)$$

Die 2. Näherung $\hat{\varepsilon}_2$ der Abweichung ε kann demnach durch die Zustandsgleichungen eines fremderregten Systems mit sich periodisch ändernden Parametern dargestellt werden. Zur Ermittlung des Übertragungsverhaltens solcher Systeme sind in der Literatur effektive Methoden angegeben worden, worauf im Kapitel 5 eingegangen wird.

Es ist möglich, daß die Gegenkopplung beim Linearteil bzw. die parameterverändernde Funktion in $\underline{A}_p$ eine Instabilität hervorruft. Daher ist das periodisch zeitvariante System vor Ermittlung des Übertragungsverhaltens auf seine Stabilität hin zu prüfen. Methoden zur Untersuchung der Stabilität sind ebenfalls in Kapitel 5 angegeben. Es wird sich zeigen, daß die Stabilitätsuntersuchung nicht nur ein notwendiges Übel ist, das die verbesserte Abschätzung der Abweichung mit sich bringt. Durch die Feststellung von Instabilitäten kann nämlich gleichzeitig auf das Auftreten bestimmter nichtlinearer Phänomene beim Regelkreis, wie z.B. das "Sprungphänomen", geschlossen werden.

Bei der Ermittlung der Näherungen $\hat{\varepsilon}_1$ und $\hat{\varepsilon}_2$ wurde bisher vorausgesetzt, daß die Kennlinien der Nichtlinearitäten eindeutig sind. Die Einbeziehung hysteresebehafteter Nichtlinearitäten $f_H(\bar{x}_w)$ ist für die

Bestimmung der 1. Näherung $\hat{\varepsilon}_1$ ohne weiteres möglich. Es muß nur berücksichtigt werden, daß die Beschreibungsfunktion dann komplex wird und der Verzerrungsanteil sich daher zu

$$v(t) = f_H(\tilde{x}_w) - N_R(x_{w0})\tilde{x}_w - \frac{N_I(x_{w0})}{\omega_0} \dot{\tilde{x}}_w \quad (3.27)$$

ergibt. Dieser Verzerrungsanteil muß natürlich auch bei der Bestimmung der 2. Näherung $\hat{\varepsilon}_2$ zugrunde gelegt werden. Zusätzlich sind aber noch Überlegungen anzustellen, wie sich die Tangentennäherung bei Kennlinien mit Hysterese verhält.

Es wird vorausgesetzt, daß die Hysterese Kennlinie aus zwei differenzierbaren Kennlinienästen besteht, die ober- bzw. unterhalb einer Schwelle $+e$ bzw. $-e$ verschmelzen, Bild 3.3. An den Verzweigungspunkten können die Kennlinienäste nur in Pfeilrichtung durchschritten werden.

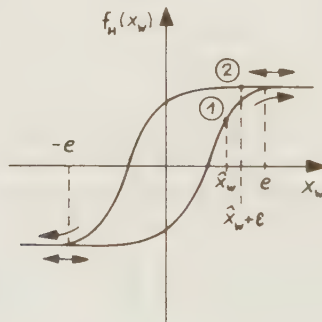


Bild 3.3

Die Tangentennäherung, auf eine der beiden Äste angewendet, liefert dabei gleichgute Ergebnisse wie bei einer entsprechenden eindeutigen Kennlinie, wenn der Aussteuerungspunkt genügend weit von den Verzweigungspunkten $\pm e$ entfernt liegt. In der Nähe der beiden Verzweigungspunkte kann es vorkommen, daß $\varepsilon(t)$ einen Verzweigungspunkt bereits überschritten hat und auf dem anderen Kennlinienast sich ein Stück zurückbewegt, während sich $\tilde{x}_w(t)$ noch auf dem ursprünglichen Kennlinien-

ast befindet. Das ist beim rechten Verzweigungspunkt, Bild 3.3, angedeutet worden. Während $\hat{x}_w(t)$ im Punkt ① noch auf dem unteren Ast liegt, ist $\varepsilon(t)$ bereits über den Verzweigungspunkt hinausgeschritten und auf dem oberen Ast zum Punkt ② zurückgewandert. Zur Ermittlung des Fehlers, der hier durch die Tangentennäherung entsteht, sei der Verzweigungspunkt größer rausgezeichnet, Bild 3.4. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem wie stark der untere Kennlinienast im Vergleich zum oberen gekrümmt ist.

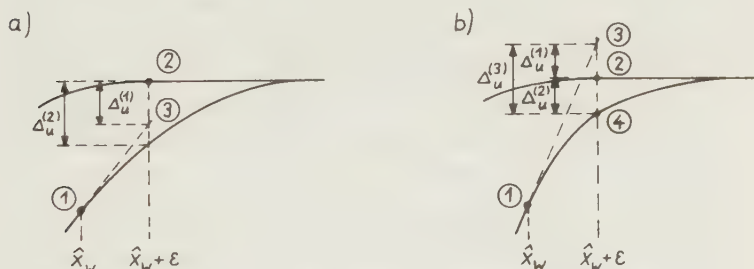


Bild 3.4

Im ersten Fall, Bild 3.4a, liegt die Tangentennäherung ③ innerhalb der Kennlinienäste. Dabei entsteht der Fehler $\Delta_u^{(1)}$, der stets kleiner ist als der Abstand $\Delta_u^{(2)}$ der Äste im Punkt $\hat{x}_w + \varepsilon$. Im zweiten Fall, Bild 3.4b, liegt die Tangentennäherung ③ oberhalb beider Kennlinienäste, wobei sich der Fehler $\Delta_u^{(1)}$ einstellt. Wäre $\varepsilon(t)$ nicht über den Verzweigungspunkt gewandert, so würde sich für $f(\hat{x}_w + \varepsilon)$ der Punkt ④ ergeben haben, was den Näherungsfehler $\Delta_u^{(3)}$ zur Folge hätte. Er ist genau um den Kennlinienabstand $\Delta_u^{(2)}$ größer als $\Delta_u^{(1)}$:

$$\Delta_u^{(3)} = \Delta_u^{(2)} + \Delta_u^{(1)}. \quad (3.28)$$

Im zweiten Fall bewirkt demnach die Hysterese sogar eine Verringerung des Fehlers. Im ersten Fall ist der Fehler stets kleiner als der vertikale Abstand der Kennlinienäste. Da vorausgesetzt wurde, daß die Kennlinien stetig in die Verzweigungspunkte einlaufen und sich danach decken, wird der Fehler beliebig klein bei genügend kleinem Effektivwert von ε .

Insgesamt kann aus dieser Fehlerbetrachtung der Schluß gezogen werden, daß auch die Bestimmung der 2. Näherung $\hat{\varepsilon}_2$ auf Nichtlinearitäten mit Hysteresekennlinien erweitert werden kann. Durch die Hysterese stellt sich aber noch ein weiteres Problem. Da es im mehrdeutigen Bereich für jeden Wert $\bar{x}_w$ zwei Funktionswerte $f_1(\bar{x}_w)$ und $f_2(\bar{x}_w)$ sowie zwei Ableitungen $f'_1(\bar{x}_w)$ und $f'_2(\bar{x}_w)$ gibt, muß für eine richtige Zuordnung Sorge getragen werden. Darauf wird im nächsten Kapitel eingegangen, weil dort für einige relevante Nichtlinearitäten die Funktionen $f'[\bar{x}_w(t)]$ hergeleitet werden.

Zuvor soll aber noch ein Problem angesprochen werden, das sich bei selbsterregten Regelkreisen ergibt. Hier muß man davon ausgehen, daß die Lösung des harmonisch linearisierten Regelkreises sich im allgemeinen auch in der Größe der Periode von der Lösung des nichtlinearen Regelkreises unterscheidet.

Ist

$$x(t) = \sum_{v=1}^{\infty} x_{0v} \sin(\omega_{0v}t + \varphi_v)$$

eine als trigonometrische Reihe dargestellte Lösung des nichtlinearen Regelkreises und

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_{01} \sin(\hat{\omega}_{01}t + \hat{\varphi}_1)$$

die zugehörige Lösung des harmonisch linearisierten Regelkreises, so ergibt sich die Abweichung $\varepsilon(t)$ zu

$$\varepsilon(t) = x_{01} \sin(\omega_{01}t + \varphi_1) - \bar{x}_{01} \sin(\hat{\omega}_{01}t + \hat{\varphi}_1) + \sum_{v=2}^{\infty} x_{0v} \sin(\omega_{0v}t + \varphi_v), \quad (3.29)$$

woraus unter Verwendung trigonometrischer Beziehungen der Ausdruck

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = (x_{01} - \bar{x}_{01}) \sin(\hat{\omega}_{01} t + \hat{\varphi}_1) + \sum_{\nu=2}^{\infty} x_{0\nu} \sin(\omega_{0\nu} t + \varphi_{\nu}) \\ + 2x_{01} \sin \frac{(\omega_{01} - \hat{\omega}_{01}) + \varphi_1 - \hat{\varphi}_1}{2} \cos \frac{(\omega_{01} + \hat{\omega}_{01})t + \varphi_1 + \hat{\varphi}_1}{2} \quad (3.30) \end{aligned}$$

folgt. Während die ersten beiden Terme umso kleiner werden, je besser die Amplituden der Grundschwingungen übereinstimmen und je kleiner der Oberwellenanteil ist, führt dagegen der letzte Term bei jeder noch so kleinen Abweichung zwischen den Kreisfrequenzen ω_{01} und $\hat{\omega}_{01}$ eine Schwebung mit einer maximalen Amplitude von $2x_{01}$ aus. Dadurch wird $\varepsilon(t)$ zeitweise so groß, daß die angeführten Näherungen (3.14) und (3.20) eigentlich nicht verwendet werden dürfen. Die weiteren Überlegungen werden zeigen, daß die Näherungen mit gewissen Einschränkungen bei $\varepsilon(t)$ dennoch zur Verwendung kommen.

Würde man von der Regelgröße $x(t)$ des nichtlinearen Regelkreises anstelle von $\bar{x}(t)$ die Harmonische

$$\tilde{x}(t) = \bar{x}_0 \sin(\omega_{01} t + \varphi_1)$$

abziehen, welche in der Kreisfrequenz und Phase mit der exakten Lösung $x(t)$ und in der Amplitude mit der Lösung $\bar{x}(t)$ des harmonisch linearisierten Regelkreises übereinstimmt, so erhielte man die Abweichung

$$\tilde{\varepsilon}(t) = (x_{01} - \bar{x}_{01}) \sin(\omega_{01} t + \varphi_1) + \sum_{\nu=2}^{\infty} x_{0\nu} \sin(\omega_{0\nu} t + \varphi_{\nu}), \quad (3.31)$$

die den Term mit der Schwebung natürlich nicht mehr enthält. Diese Abweichung $\tilde{\varepsilon}$ wird jetzt um so kleiner, je besser die Amplituden der Grundschwingungen übereinstimmen und je kleiner der Oberwellenanteil ist. Bei der so definierten Abweichung spricht nichts mehr prinzipiell gegen die Anwendung der Näherungen (3.14) und (3.20). Die 1. Näherung $\hat{\varepsilon}_1$ der Abweichung $\tilde{\varepsilon}$ wird dann durch das Gleichungssystem

$$\hat{\underline{q}} = \underline{a} \hat{\underline{q}} + \underline{b} [f(\tilde{x}_w) - N(x_w) \tilde{x}_w] \quad (3.32a)$$

$$\hat{\varepsilon}_1 = \underline{c}^T \hat{\underline{q}} \quad (3.32b)$$

beschrieben. Es unterscheidet sich von dem Gleichungssystem (3.15) für die Abweichung $\hat{\varepsilon}_1$, indem es mit dem Oberwellenanteil der mit $\tilde{x}_w$ anstel-

le von $\tilde{x}_w$ ausgeregelten Nichtlinearität erregt wird. Daraus folgt, daß die Effektivwerte von $\hat{\varepsilon}_1$ und $\hat{\varepsilon}_1$ übereinstimmen würden, wenn der Frequenzgang $F(j\omega)$, der sowohl diesem System (3.32) als auch dem System (3.15) für $\hat{\varepsilon}_1$ zugeordnet werden kann, bei den Kreisfrequenzen ω_{01} und $\hat{\omega}_{01}$ die selben Werte hätte, was bei genügend kleiner Abweichung zwischen ω_{01} und $\hat{\omega}_{01}$ der Fall ist.

Das Gleichungssystem für die 2. Näherung $\hat{\varepsilon}_2$ geht aus (3.32) durch Hinzufügen der parametererregenden Funktion $f'[\tilde{x}_w(t)]$ hervor, bei der auch wieder $\tilde{x}_w$ anstelle von $\tilde{x}_w$ steht. Für die Effektivwerte von $\hat{\varepsilon}_2$ und $\hat{\varepsilon}_2$ gilt das gleiche wie für die Effektivwerte von $\hat{\varepsilon}_1$ und $\hat{\varepsilon}_1$, allerdings mit dem Frequenzgang $F_p(j\omega, t)^*$ der dann periodischen Systeme.

Die Berechnung der Effektivwerte von $\hat{\varepsilon}_1$ und $\hat{\varepsilon}_2$ kann demnach als genäherte Bestimmung der Effektivwerte von $\hat{\varepsilon}_1$ und $\hat{\varepsilon}_2$ aufgefaßt werden. In diesem Sinne wird die Abweichung $\varepsilon(t)$ unter Vernachlässigung des Frequenz- und Phasenfehlers näherungsweise durch die Gleichungssysteme (3.15) und (3.23) beschrieben. Der Phasenfehler interessiert bei selbsterregten Regelkreisen im allgemeinen nicht, da die Phasenlage von den Anfangswerten bestimmt wird. Ferner ist der quadratische Mittelwert des Differenzsignals ohnehin kein geeignetes Kriterium für den Frequenzfehler, weil hierbei kein proportionaler Zusammenhang besteht.

Abschließend sei noch der Fall erwähnt, bei dem der nichtlineare Regelkreis eine stabile Grenzschwingung besitzt, während sie sich mit dem harmonisch linearisierten Regelkreis nicht feststellen läßt. Für diesen Fall sind die dargestellten genäherten Beschreibungen der Abweichung ε natürlich ungeeignet, da sie voraussetzen, daß die harmonische Lösung in der engeren Umgebung der exakten Lösung liegt.

Zu der Beschreibung der Abweichung ε auf der Grundlage der Tangenten-näherung ist zu sagen, daß sie im Ansatz bereits von P. POPOW, J. PALTOW /10/ vorgenommen wurde. Sie trafen jedoch dann Vernachlässigungen, die zu einer Erfassung von ε durch die 1. Näherung führte.

* Genaue Bedeutung wird im Kapitel 5 ausführlich erklärt.

4 DARSTELLUNG DER PARAMETERVERÄNDERNDEN FUNKTION

Die Bestimmung der 2. Näherung $\hat{\varepsilon}_2$ der Abweichung ε setzt voraus, daß die Kennlinien der Nichtlinearitäten differenzierbar sind. Daher scheiden schaltende Regler oder Stellglieder für diese Ermittlung aus. Bei in der Technik vorkommenden Nichtlinearitäten mit Begrenzung, toter Zone oder Hysterese, um nur drei wichtige Typen zu nennen, kann man im allgemeinen davon ausgehen, daß die Kennlinien differenzierbar sind. Häufig verlaufen die Kennlinien über größere Bereiche geradlinig, ohne dabei durch eine analytische Funktion darstellbar zu sein. Daher werden sie zur leichteren Charakterisierung für eine theoretische Behandlung durch Polygonzüge approximiert. Diese charakteristischen Kennlinien sind aber nur stückweise differenzierbar, weswegen sie hier eigentlich nicht verwendet werden dürfen. Die folgende Darstellung am Beispiel einer Nichtlinearität mit Begrenzung, Bild 4.1, wird jedoch zeigen, daß trotzdem nicht auf die charakteristischen Kennlinien verzichtet werden muß.

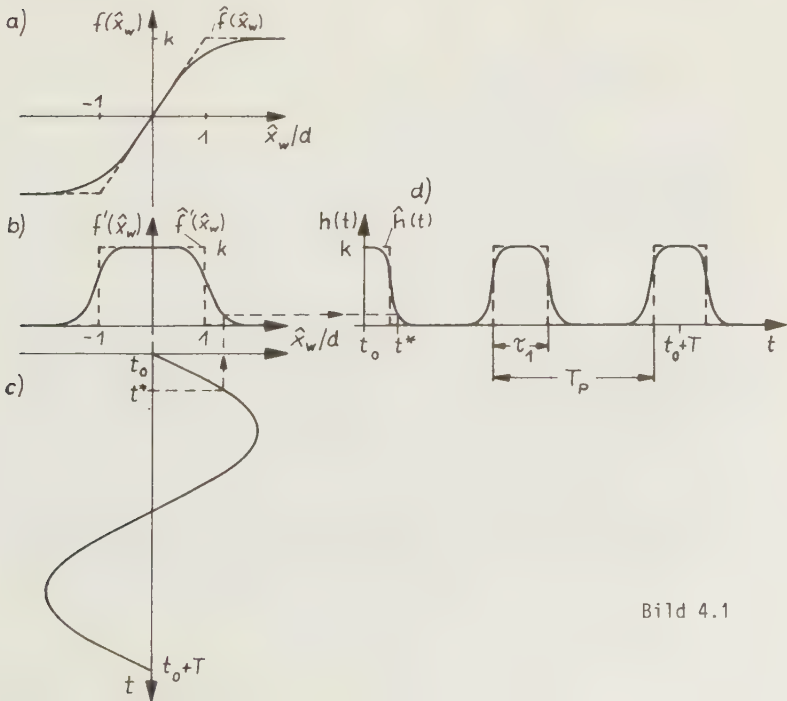


Bild 4.1

Zur graphischen Ermittlung der parameterverändernden Funktion

$$h(t) = \left. \frac{d f(\bar{x}_w)}{d \bar{x}_w} \right|_{\bar{x}_w = x_{w0} \sin(\omega_0 t + \varphi)} \quad (4.1)$$

wird zunächst die begrenzende Kennlinie $f(\bar{x}_w)$, Bild 4.1a, nach $\bar{x}_w$ abgeleitet und es ergibt sich $f'(\bar{x}_w)$, Bild 4.1b. Anschließend werden für vorgegebene Zeiten t^* die Amplituden des sinusförmigen Eingangssignals $\bar{x}_w(t^*) = x_{w0} \sin(\omega_0 t^* + \varphi)$ der Nichtlinearität, Bild 4.1c, an die abgeleitete Kennlinie $f'(\bar{x}_w)$ projiziert und man erhält mit den Ordinaten der Projektionspunkte die gesuchten Amplitudenwerte der parameterverändernden Funktion $h(t^*)$, Bild 4.1d. Wendet man nun auf die charakteristische Kennlinie $\tilde{f}(\bar{x}_w)$ des Begrenzers diese Operationen an, so ergibt sich $h(t)$ näherungsweise, gestrichelter Verlauf Bild 4.1d. Für die Ableitung der charakteristischen Kennlinie $\tilde{f}(\bar{x}_w)$ in den Punkten $\pm d$ kann dabei ihr links- oder rechtsseitiger Grenzwert eingesetzt werden.

Die charakteristischen Kennlinien der Nichtlinearitäten werden also zu einer näherungsweisen Ermittlung der parameterverändernden Funktionen $h(t)$ herangezogen. Ihr genäherter Verlauf $\hat{h}(t)$ stimmt dabei um so genauer mit dem exakten überein, je besser der Polygonzug die Kennlinie der Nichtlinearität approximiert. Die Näherung $\hat{h}(t)$ ist stets eine Rechteckschwingung, wenn die Geradenabschnitte der charakteristischen Kennlinie nur zwei verschiedene Steigungen besitzen, worauf sich diese Arbeit beschränken wird.

Bei Kennlinien mit Hysterese wird ebenfalls an Hand der Polygonzug-Näherung die parameterverändernde Funktion näherungsweise ermittelt. Hier kann man jedoch nicht von $\bar{x}_w$ eindeutig auf die Ableitung $\tilde{f}'(\bar{x}_w)$ schließen, da sie ebenso wie $\tilde{f}(\bar{x}_w)$ bereichsweise zwei Werte besitzt. Eine Möglichkeit zur Ermittlung von $\hat{h}(t)$ besteht darin, zunächst das Ausgangssignal $u(t)$ der Nichtlinearität zu skizzieren, um dann damit auf die Belegung der einzelnen Kennlinienäste während des Zeitablaufes einer Periode T schließen zu können, Bild 4.2.

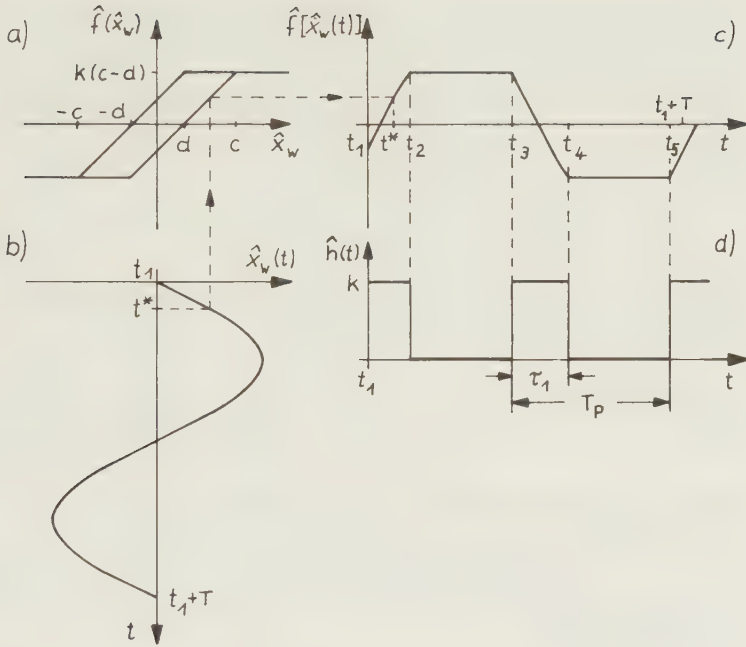


Bild 4.2

Im Zeitintervall (t_1, t_2) wird der rechte Kennlinienast mit der Steigung k belegt, Bild 4.2a, so daß hier $\hat{h}(t) = k$ ist, Bild 4.2d. Im Intervall (t_2, t_3) befindet sich die Nichtlinearität in der oberen Begrenzung, was zu $\hat{h}(t) = 0$ führt. Anschließend folgt der linke Kennlinienast während (t_3, t_4) und die untere Begrenzung während (t_4, t_5) , was wiederum $\hat{h}(t) = k$ und $\hat{h}(t) = 0$ ergibt. Wegen der Nullpunktsymmetrie der hysteresebehafteten Kennlinie gilt wie bei eindeutigen ungeraden Kennlinien, daß die Periode T_P der parameterverändernden Funktion $\hat{h}(t)$ halb so groß ist wie die Periode T der erregenden Schwingung $\hat{x}_w(t)$.

Eine andere Möglichkeit zur Ermittlung von $\hat{h}(t)$ ist dadurch gegeben, daß bei monoton bis über den oberen Verzweigungspunkt der Hysterese-

kennlinie ansteigenden und dann monoton bis unter den unteren Verzweigungspunkt abfallenden Eingangssignalen $x_w(t)$ der Nichtlinearität die Belegung der Kennlinienäste durch die Ableitung $\dot{x}_w(t)$ gekennzeichnet werden kann. Dann läßt sich die mehrdeutige Funktion $f_H(x_w)$ durch eine entsprechende eindeutige Funktion $f(x_w)$ mit zusätzlicher $\dot{x}_w$ -Abhängigkeit in folgender Weise darstellen:

$$f_H(x_w) = f(x_w - d \cdot \operatorname{sgn} \dot{x}_w) \quad . \quad (4.2)$$

Bei dieser Kennzeichnung müßte man anstelle der eindimensionalen Tangentennäherung (3.20) die zweidimensionale

$$f[\bar{x}_w - \varepsilon - d \cdot \operatorname{sgn}(\dot{\bar{x}}_w - \dot{\varepsilon})] \approx f(\bar{x}_w - d \cdot \operatorname{sgn} \dot{\bar{x}}_w) - \frac{\partial}{\partial \bar{x}_w} f(\bar{x}_w - d \cdot \operatorname{sgn} \dot{\bar{x}}_w) \varepsilon - \frac{\partial}{\partial \dot{\bar{x}}_w} f(\bar{x}_w - d \cdot \operatorname{sgn} \dot{\bar{x}}_w) \dot{\varepsilon} \quad (4.3)$$

verwenden. Es ist aber der dritte Term der rechten Seite

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\bar{x}}_w} f[(\bar{x}_w - d \cdot \operatorname{sgn} \dot{\bar{x}}_w)] \equiv 0 \quad ; \quad (4.4)$$

denn einerseits gilt

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\bar{x}}_w} \operatorname{sgn} \dot{\bar{x}}_w = 0 \quad \text{für } |\dot{\bar{x}}_w| > 0 \quad (4.5)$$

und andererseits ist

$$\lim_{\dot{\bar{x}}_w \rightarrow 0} \left[f(\bar{x}_w - d \cdot \operatorname{sgn} \dot{\bar{x}}_w) - f[\bar{x}_w - d \cdot \operatorname{sgn} (-\dot{\bar{x}}_w)] \right] = 0, \quad (4.6)$$

weil nach Voraussetzung $\bar{x}_w(t)$ dort das Vorzeichen wechselt, wo sich die Kennlinienäste decken. Infolgedessen bleibt es bei der Tangentennäherung bzgl. x_w , und die parameterverändernde Funktion ergibt sich zu

$$h(t) = \frac{\partial}{\partial x_w} f[\bar{x}_w(t) - d \cdot \operatorname{sgn} \dot{\bar{x}}_w(t)] \quad . \quad (4.7)$$

Bei einer graphischen Ermittlung von $h(t)$ kann man entweder $\bar{x}_w - d \cdot \operatorname{sgn} \dot{\bar{x}}_w$ insgesamt als Argument oder $\bar{x}_w$ allein als Argument und $\operatorname{sgn} \dot{\bar{x}}_w$ als Para-

meter der Funktion $f(\hat{x}_w - d \operatorname{sgn} \dot{\hat{x}}_w)$ betrachten. Am Beispiel des Begrenzers mit Hysterese soll der 2. Fall, der einfacher erscheint, dargestellt werden, Bild 4.3. Dabei wird wieder von der charakteristischen Kennlinie ausgegangen, so daß sich $\hat{h}(t)$ ergibt.

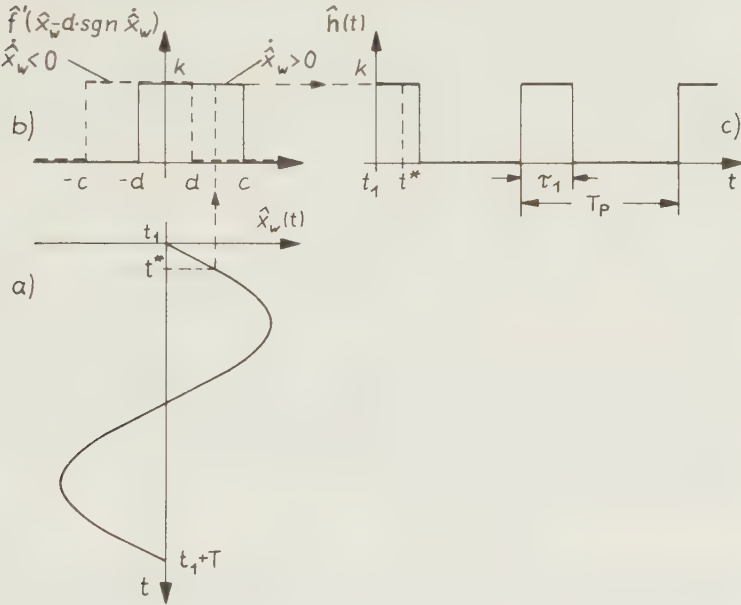


Bild 4.3

Durch Projektion der Amplitudenwerte $\hat{x}_w(t)$, Bild 4.3a, zu vorgegebenen Zeiten t^* an die abgeleitete Kennlinie $f'(\hat{x}_w - d \operatorname{sgn} \dot{\hat{x}}_w)$, die für $\dot{\hat{x}}_w > 0$ den ausgezogenen und für $\dot{\hat{x}}_w < 0$ den gestrichelten Verlauf hat, Bild 4.3b, ergeben sich mit den Ordinaten der Projektionspunkte die Amplitudenwerte von $\hat{h}(t^*)$, Bild 4.3c. Ein Vergleich zwischen den Bildern 4.2d und 4.3c zeigt, daß die auf unterschiedliche Weise ermittelten Funktionen $\hat{h}(t)$ sich decken, was auch gewährleistet sein muß.

Die als Rechteckschwingung $\hat{h}(t)$ näherungsweise darstellbare parameterverändernde Funktion $h(t)$ kann durch die Periode T_P , zwei Amplitudenwerte h_1 und h_2 und das Tastverhältnis

$$\gamma = \frac{\tau_1}{T_p} \quad (4.8)$$

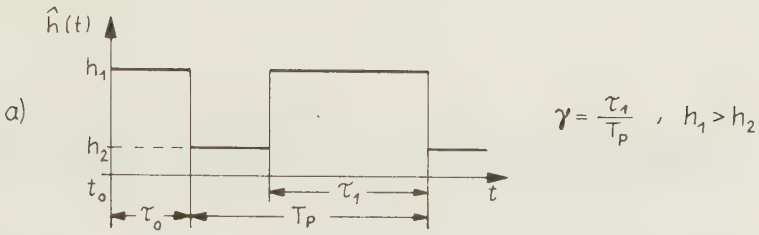
eindeutig gekennzeichnet werden, Bild 4.4a. Da die Phasenlage zwischen der parameterverändernden Funktion und der Eingangserregung das Übertragungsverhalten des zeitvarianten Systems beeinflusst, wird außerdem noch die Zeitdauer τ_0 zwischen einem mit positiver Steigung erfolgten Nulldurchgang von $\tilde{x}_w(t)$, der mit t_0 bezeichnet sei, und dem darauffolgenden Amplitudensprung von $\hat{h}(t)$ zum niedrigeren Wert h_2 hin zur Kennzeichnung mit herangezogen. In einer Tabelle, Bild 4.4b, sind für einige technisch relevante Nichtlinearitäten die charakteristischen Kennlinien und die daraus resultierenden Kennwerte für $\hat{h}(t)$ angegeben worden. Sie sind eindeutig durch die Amplitude x_{w0} und Periode T des Eingangssignals und durch die Kennwerte der Nichtlinearität bestimmt.

Die Geraden-Approximation braucht nicht angewendet zu werden, wenn die Übertragung der Nichtlinearität durch eine analytische Funktion gegeben ist. Dann liegt mit ihrer Ableitung ebenfalls eine analytische Funktion für $h(t)$ vor. Als Beispiel sei die Funktion

$$f(\tilde{x}_w) = \tilde{x}_w^3 \quad (4.9)$$

erwähnt, welche die Charakteristik einer mechanischen Feder beschreibt. Die parameterverändernde Funktion ergibt sich dann zu

$$h(t) = \frac{3}{2} x_{w0}^2 \{1 - \cos[2(\omega_0 t + \varphi)]\} \quad (4.10)$$



b)

Nichtlinearität	Kennwerte von $\hat{h}(t)$				
	T_P	γ	τ_0	h_1	h_2
Steigung k	$\frac{T}{2}$	$\frac{2}{\pi} \arcsin \frac{d}{x_{w_0}}$ $(x_{w_0} > d)$	$\frac{T}{4} \gamma$	k	0
Steigung k	$\frac{T}{2}$	$1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{d}{x_{w_0}}$ $(x_{w_0} > d)$	$\frac{T}{4} (1 + \gamma)$	k	0
Steigungen k_1, k_2	$\frac{T}{2}$	$\frac{2}{\pi} \arcsin \frac{d}{x_{w_0}}$ $(x_{w_0} > d)$	$\frac{T}{4} \gamma$	k_1	k_2
Steigung k	$\frac{T}{2}$	$\frac{1}{\pi} \left(\arcsin \frac{d}{x_{w_0}} + \arcsin \frac{c}{x_{w_0}} \right)$ $(x_{w_0} > c)$	$\frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{c}{x_{w_0}}$	k	0

Bild 4.4

5 BEHANDLUNG VON LINEAREN SYSTEMEN MIT PERIODISCH SICH ÄN- DERNDEN PARAMETERN

5.1 Bestimmung des Frequenzganges

Ändern sich Parameter von linearen Systemen mit der Zeit, so ist im Gegensatz zu zeitinvarianten Systemen das Ausgangssignal $y(t)$ im allgemeinen in seiner Form abhängig vom Einschaltzeitpunkt τ des Eingangssignals $x(t)$. Hängen die Parameter dabei periodisch von der Zeit ab, so äußert sich das z.B. bei der Gewichtsfunktion in einer Periodizität bezüglich des Einschaltzeitpunktes:

$$g(t+vT_p, \tau) = g(t, \tau - T_p) . \quad (5.1)$$

Darin ist T_p die kleinste Periode des Systems und v eine beliebige ganze Zahl. Für den Frequenzgang des Systems kommt durch die periodische Parameteränderung zur Frequenzabhängigkeit noch eine Abhängigkeit von der Zeit hinzu, die wiederum periodisch ist. Infolgedessen kann man den Frequenzgang bezüglich der Zeit als Fourierreihe mit frequenzabhängigen Koeffizienten angeben:

$$F(j\omega, t) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} n_v(j\omega) e^{j v \omega_p t} \quad (\omega_p = \frac{2\pi}{T_p}) . \quad (5.2)$$

Dieses Ergebnis erhält man, indem die Gewichtsfunktion der Fourier-Transformation bzgl. der Variablen $\vartheta = t - \tau$, die das "Alter" der Impulsantwort angibt, unterworfen wird. Wie bei zeitinvarianten Systemen besitzt auch dieser Frequenzgang die grundlegende Eigenschaft, gleich dem Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangssignal zu sein, wenn als Eingangssignal die harmonische Exponentielle gewählt wird:

$$F(j\omega, t) = \frac{y(t)}{x(t)} \Big|_{x(t) = e^{j\omega t}} . \quad (5.3)$$

Alt Antwort auf $x(t) = e^{j\omega t}$ erhält man mit (5.2) und (5.3) demnach:

$$y(t) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} n_v(j\omega) e^{j(v\omega_p + \omega)t} . \quad (5.4)$$

Das Ausgangssignal $y(t)$ ist wiederum eine periodische Zeitfunktion, deren mit $n_v(j\omega)$ gewichtete Spektrallinien außer bei der Kreisfrequenz der Eingangsgröße noch links und rechts davon im Abstand von $|v|$ -Vielfachen der Kreisfrequenz ω_p der Parametergrundschwingung liegen. Ist das zu untersuchende System im Zustandsraum beschrieben, wie im vorliegenden Fall (3.23), so können die Zustandsgleichungen unmittelbar zur Bestimmung der gesuchten Koeffizienten $n_v(j\omega)$ ($v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) herangezogen werden [12], was im folgenden gezeigt wird.

Die in dieser Arbeit relevanten Fälle werden allgemein beschrieben durch die Zustandsgleichungen

$$\dot{\underline{z}}(t) = \underline{A}(t) \underline{z}(t) + \underline{b} x(t) \quad (5.5a)$$

$$y(t) = \underline{c}^T \underline{z}(t) \quad (5.5b)$$

mit dem Zustandsvektor $\underline{z}(t)$, der n -reihigen quadratischen zeitabhängigen Systemmatrix $\underline{A}(t)$, dem konstanten Steuerungsvektor $\underline{b}$ und dem konstanten Beobachtungsvektor $\underline{c}^T$ aus m -Komponenten ($m \leq n-1$). Ferner sind $x(t)$ das Eingangs- und $y(t)$ das Ausgangssignal. Die Matrix $\underline{A}(t)$ hängt periodisch mit der Periode T_p von der Zeit ab, so daß sie sich als trigonometrische Reihe

$$\underline{A}(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \underline{A}_{\mu} e^{j\mu\omega_p t}, \quad \omega_p = 2\pi/T_p, \quad (5.6)$$

mit den konstanten Koeffizientenmatrizen

$$\underline{A}_{\mu} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(\mu)} & a_{12}^{(\mu)} & \dots & a_{1n}^{(\mu)} \\ a_{21}^{(\mu)} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & \\ a_{n1}^{(\mu)} & a_{n2}^{(\mu)} & \dots & a_{nn}^{(\mu)} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

darstellen läßt. Jede Komponente des Zustandsvektors $\underline{z}(t)$ darf als Reaktion eines linearen periodisch zeitvarianten Systems auf das Ein-

gangssignal $x(t)$ betrachtet werden. Folglich erhält man bei Erregung mit $x(t) = e^{j\omega t}$ analog zu (5.4) für den Zustandsvektor die Beziehung

$$\underline{z}(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \underline{q}_{\nu}(j\omega) e^{j(\nu\omega_p + \omega)t} . \quad (5.8)$$

Darin ist $\underline{q}_{\nu}(j\omega)$ ein Vektor, der zwar von der erregenden Kreisfrequenz ω aber nicht von der Zeit t abhängt. Durch Substitution des Zustandsvektors $\underline{z}(t)$ in (5.5b) mit (5.8) ergibt sich

$$y(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \underline{c}^T \underline{q}_{\nu}(j\omega) e^{j(\nu\omega_p + \omega)t} . \quad (5.9)$$

Ein Vergleich dieser Beziehung mit (5.4) führt unmittelbar zu dem Ergebnis

$$n_{\nu}(j\omega) = \underline{c}^T \underline{q}_{\nu}(j\omega) . \quad (5.10)$$

Der Frequenzgang $F(j\omega, t)$ ist also bekannt, sobald die Vektoren $\underline{q}_{\nu}(j\omega)$ bestimmt worden sind. Dafür bildet man zunächst in (5.8) die Ableitung von $\underline{z}(t)$:

$$\dot{\underline{z}}(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} j(\nu\omega_p + \omega) \underline{q}_{\nu}(j\omega) e^{j(\nu\omega_p + \omega)t} . \quad (5.11)$$

Ersetzt man dann in (5.5a) den Vektor $\underline{z}(t)$ durch (5.8) und seine Ableitung $\dot{\underline{z}}(t)$ durch (5.11), so erhält man nach Division durch $x(t) = e^{j\omega t}$ die Beziehung

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} j(\nu\omega_p + \omega) \underline{q}_{\nu}(j\omega) e^{j\nu\omega_p t} = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \underline{A}_{\mu} \underline{q}_{\nu}(j\omega) e^{j(\mu+\nu)\omega_p t} + \underline{b} . \quad (5.12)$$

Da diese Gleichung identisch in der Variablen t erfüllt sein muß, folgt hieraus durch Koeffizientenvergleich

$$j(v\omega_p + \omega) \underline{q}_v(j\omega) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \underline{A}_{v-x} \underline{q}_x(j\omega) + \underline{r}_v \quad (v = 0, \pm 1, \dots) \quad (5.13a)$$

$$\text{mit} \quad \underline{r} = \begin{cases} \underline{b} & \text{für } v = 0 \\ \underline{0} & \text{für } v \neq 0 \end{cases}, \quad (5.13b)$$

wobei $\underline{0}$ ein Vektor ist, dessen n Komponenten jeweils gleich Null sind. Hiermit ist ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Vektoren $\underline{q}_v(j\omega)$ gefunden, das sich mit der Matrix

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{A}_0 - j(\omega - 2\omega_0) \underline{E} & \underline{A}_{-1} & \underline{A}_{-2} & \cdot & \cdot \\ \underline{A}_1 & \underline{A}_0 - j(\omega - \omega_0) \underline{E} & \underline{A}_{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \underline{A}_1 & \underline{A}_0 - j\omega \underline{E} & \underline{A}_{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \underline{A}_1 & \underline{A}_0 - j(\omega + \omega_0) \underline{E} & \underline{A}_{-1} \\ \cdot & \cdot & \underline{A}_2 & \underline{A}_1 & \underline{A}_0 - j(\omega + 2\omega_0) \underline{E} \end{bmatrix} \quad (5.14a)$$

und den Vektoren

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \underline{q}_1 \\ \underline{q}_0 \\ \underline{q}_{-1} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{r} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \underline{r}_1 \\ \underline{r}_0 \\ \underline{r}_{-1} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5.14b)$$

auch in der Form

$$\underline{K} \underline{q} = \underline{r} \quad (5.14c)$$

schreiben läßt. In (5.14a) bedeutet $\underline{E}$ die $(n \times n)$ -Einheitsmatrix.

Die numerische Auswertung gelingt nur für ein Gleichungssystem aus endlich vielen Gleichungen. Man beschränkt sich daher auf einen endlichen Ausschnitt der unendlich-reihigen Matrix $\underline{K}(\omega)$, indem man die Elemente $\underline{K}_{\mu\nu}(\underline{K}_{00} = \underline{A}_0 - j\omega \underline{E})$; $\mu, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$; N beliebig ganz von $\underline{K}(\omega)$ zu einer $(2N+1)$ -reihigen quadratischen Matrix $\underline{K}_N$ zusammenfaßt. Aus dem endlichen Gleichungssystem

$$\underline{K}_N \underline{q}^{(N)} = \underline{r} \quad (5.15)$$

wird die Lösung $\underline{q}^{(N)}$ ermittelt, falls $\det \underline{K}_N \neq 0$ ist. Konvergiert $\underline{q}^{(N)}$ mit wachsendem N gegen $\underline{q}$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \underline{q}^{(N)} = \underline{q}, \quad (5.16)$$

so wird $\underline{q}^{(N)}$ als Näherung des exakten Vektors $\underline{q}$ betrachtet. Dabei darf man davon ausgehen, daß $\underline{q}^{(N)}$ um so genauer mit $\underline{q}$ übereinstimmt, je größer N gewählt wird /12/.

5.2 Stabilität

Vor der Verwendung des Frequenzganges $F(j\omega, t)$ muß sicher gestellt sein, daß das periodisch zeitvariante System stabil ist, daß also ein beschränktes Eingangssignal ein beschränktes Ausgangssignal zur Folge hat. Das ist gewährleistet, wenn das System ohne Erregung, d.h. ohne Eingangssignal, eine asymptotisch stabile Ruhelage besitzt.

Beschreiben die Zustandsgleichungen

$$\dot{\underline{z}}(t) = \underline{A}(t) \underline{z}(t) \quad (5.17a)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{c}^T \underline{z}(t) \quad (5.17b)$$

das nichterregte System und bedeutet $\underline{\Phi}(t, t_0)$ dessen Übergangsmatrix, so besagt ein grundlegendes Ergebnis der Systemtheorie /13/, daß dieses System genau dann asymptotisch stabil ist, wenn die Norm $\|\underline{\Phi}(t, t_0)\|$ für $t \geq t_0$ beschränkt ist und bei festem t_0 für $t \rightarrow \infty$ gegen Null strebt.

Die Elemente der Koeffizientenmatrizen $\underline{A}(t)$ sind entweder konstant oder hängen periodisch von der Zeit mit derselben Periodendauer T_p ab:

$$\underline{A}(t+T_p) = \underline{A}(t) . \quad (5.18)$$

Für die Übergangsmatrix solcher Systeme gilt die Beziehung /13/ :

$$\underline{\Phi}(t+nT_p, t_0) = \underline{\Phi}(t, t_0) \underline{K}^n , \quad (5.19)$$

wobei n ganzzahlig, $\underline{K}$ eine nichtsinguläre konstante Matrix und t_0 ein beliebig wählbarer Anfangszeitpunkt ist. Zum Nachweis dieser Aussage braucht man nur zu zeigen, daß auch $\underline{\Phi}(t+nT_p, t_0)$ Lösung von (5.17a) ist; denn zwei verschiedene Lösungen einer Vektor-Differentialgleichung können sich nur um eine konstante Faktormatrix unterscheiden, die im vorliegenden Fall nicht singulär ist. Die Matrix $\underline{K}$ ergibt sich dabei aus (5.19) für $t=t_0$, $n=1$ und unter Ausnutzung der Eigenschaft

$$\underline{\Phi}(t_0, t_0) = \underline{E} \quad (\underline{E} \text{ ist Einheitsmatrix}) \quad (5.20)$$

zu

$$\underline{K} = \underline{\Phi}(t_0 + T_p, t_0) . \quad (5.21)$$

Ist nun die Übergangsmatrix $\underline{\Phi}$ und damit auch ihre Norm $\|\underline{\Phi}\|$ im Periodizitätsbereich $t_0 \leq t < t_0 + T_p$ beschränkt, so gilt dies wegen (5.19) darüber hinaus auch für beliebig große aber endliche Zeiten. Mit dieser Voraussetzung liegt asymptotische Stabilität des periodischen Systems genau dann vor, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\underline{K}^n\| = 0 \quad (5.22)$$

ist. Die Stabilität ist dabei unabhängig von der Wahl des Anfangszeitpunktes t_0 ; denn für jeden anderen Anfangszeitpunkt t_1 folgt aus der Stabilität von $\underline{\Phi}(t, t_0)$ wegen der Gruppeneigenschaft von Übergangsmatrizen /13/,

$$\underline{\Phi}(t, t_1) = \underline{\Phi}(t, t_0) \underline{\Phi}(t_0, t_1) , \quad (5.23)$$

auch die Stabilität von $\underline{\Phi}(t, t_1)$.

Für jedes asymptotisch stabile periodische System muß es nun wegen des existierenden Grenzwertes (5.22) ein n_0 geben, so daß für alle $n > n_0$ die Ungleichung

$$\| \underline{K}^n \| < 1 \quad (5.24)$$

erfüllt ist.

Neben diesem "Normenkriterium" kann (5.22) noch zu einer weiteren Aussage herangezogen werden, die sich auf die Eigenwerte bezieht. Nach einem aus der Matrizenrechnung bekannten Satz /14/ strebt die Folge $\{\| \underline{K}^n \| \}$ für $n \rightarrow \infty$ genau dann gegen Null, wenn alle Eigenwerte λ_i der Matrix $\underline{K}$ dem Betrage nach kleiner als Eins sind:

$$|\lambda_i| < 1 \quad \text{für } i=1,2,\dots,m \quad (m \text{ ist Rang von } \underline{K}). \quad (5.25)$$

Zur Stabilitätsprüfung muß also festgestellt werden, ob sämtliche Nullstellen λ_i des charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda) = \det (\lambda \underline{E} - \underline{K}) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n \quad (5.26)$$

im Inneren des Einheitskreises der λ -Ebene liegen.

Für die Anwendung beider Kriterien sind Vorschläge gemacht worden, die den numerischen Aufwand reduzieren. Bei der Auswertung des Normenkriteriums genügt es /15/, nur die Norm für die Potenzen $\underline{K}$, $\underline{K}^2$, $\underline{K}^4$, $\underline{K}^8 \dots$ zu berechnen, die durch fortlaufendes Quadrieren einfach gewonnen werden können. Wird die Norm von einem Glied dieser Folge ab kleiner als Eins, so kann die Rechnung abgebrochen werden, da die asymptotische Stabilität dann sichergestellt ist. Diese Vorgehensweise liefert allerdings nur eine hinreichende Aussage für die asymptotische Stabilität /16/. Es kann einerseits der Fall eintreten, daß bei einem stabilen System die Norm $\| \underline{\Phi}^n \|$ für $n < n_0$ den Zahlenbereich der Rechenanlage überschreitet und damit $\| \underline{\Phi}^n \| < 1$ für $n > n_0$ nicht mehr erkannt wird. Zum anderen kann die Konvergenz der Folge $\{\| \underline{K}^n \| \}$ so langsam sein, daß die Rechenzeit überschritten wird oder numerische Ungenauigkeiten überwiegenden Einfluß gewinnen.

Ohne die Nullstellen des Polynoms $P(\lambda)$, Gl. (5.26), bestimmen zu müssen, stellt das COHNsche Kriterium /17/ fest:

Alle Nullstellen des Polynoms $P(\lambda)$ liegen genau dann im Innern des Einheitskreises, wenn

$$(\alpha) \quad |a_n| > |a_0| \quad (5.27)$$

gilt und wenn mit

$$\bar{P}(\lambda) = \lambda^n P\left(\frac{1}{\lambda}\right) = a_n + a_{n-1}\lambda + \dots + a_0\lambda^n \quad (5.28)$$

(\beta) alle Nullstellen des Polynoms

$$P_1(\lambda) = a_n P(\lambda) - a_0 \bar{P}(\lambda) \quad (5.29a)$$

$$= b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \dots + b_n\lambda^n \quad (5.29b)$$

im Innern des Einheitskreises liegen.

Einen Beweis dieser Aussage findet man z.B. in **/16/**, wo er in kurzer übersichtlicher Form geführt worden ist.

Wendet man das COHN sche Kriterium wiederum auf $P_1(\lambda)$, dann auf $P_2(\lambda) \dots a_n$, wobei P_2 aus P_1 wie P_1 aus P gebildet wird usw., so ergibt sich als notwendige und hinreichende Stabilitätsbedingung **/16/**, daß die Koeffizienten der ersten Spalte des Schemas

$$\begin{array}{cccccc} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & b_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdot & \cdot & \cdot & b_n \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdot & \cdot & \cdot & c_n \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ e_n & e_{n-1} & e_{n-2} & & & & \\ e_{n-2} & e_{n-1} & e_n & & & & \\ f_n & f_{n-1} & & & & & \\ f_{n-1} & f_n & & & & & \end{array} \quad (5.30a)$$

$$\text{mit } b_v = \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-v} \\ a_0 & a_v \end{bmatrix}, c_v = \det \begin{bmatrix} b_n & b_{n-v+1} \\ b_1 & b_v \end{bmatrix},$$

$$\dots, f_v = \det \begin{bmatrix} e_n & e_{2n-2-v} \\ e_{n-2} & e_v \end{bmatrix} \quad (5.30b)$$

die Ungleichungen

$$|a_n| > |a_0|, |b_n| > |b_1|, \dots, |f_n| > |f_{n-1}| \quad (5.30c)$$

erfüllen.

Die sukzessive Bestimmung der Koeffizienten durch ein und dieselbe Operation und die Auswertung der Ungleichungen gestatten natürlich eine einfache Programmierbarkeit an Rechenanlagen.

Die dargestellten Stabilitätskriterien erfordern die Kenntnis der Übergangsmatrix $\Phi(t_0 + T_p, t_0)$. Ihre Ermittlung wird vergleichsweise einfach, wenn die parameterverändernde Funktion $h(t)$ als Rechteckschwingung betrachtet werden kann, was in dieser Arbeit vornehmlich der Fall ist.

Die rechteckförmige Parameteränderung $\hat{h}(t)$ nimmt während einer Periode T_p für die Dauer τ_1 den Wert h_1 und für $T_p - \tau_1$ den Wert h_2 an, vgl. Kapitel 4.

Somit kann die Matrix $A_p(t)$ des periodischen Systems (3.23) für eine Periode T_p durch

$$A_p(t) = \begin{cases} A_1 = \underline{A} - h_1 \underline{b} \underline{c}^T & \text{für } t_0 \leq t < t_0 + \tau_1 \\ A_2 = \underline{A} - h_2 \underline{b} \underline{c}^T & \text{für } t_0 + \tau_1 \leq t < t_0 + T_p \end{cases} \quad (5.31)$$

dargestellt werden. Der Anfangszeitpunkt t_0 , der keinen Einfluß auf die Stabilität hat, ist dabei so gewählt worden, daß die Matrix $A_p(t)$ innerhalb einer Periode nur einmal ihren Wert ändert, was die weitere Ermittlung vereinfacht. Die Systemmatrix ist also stückweise konstant.

Daher läßt sich für jeden der beiden Zeitabschnitte einer Periode die Übergangsmatrix wie bei einem zeitinvarianten System ermitteln. Ist

$$\underline{\Phi}(t_0 + \tau_1, t_0) = e^{\underline{A}_1 \tau_1} \quad (5.32)$$

die Übergangsmatrix des ersten und

$$\underline{\Phi}(t_0 + T_p, t_0 + \tau_1) = e^{\underline{A}_2 (T_p - \tau_1)} \quad (5.33)$$

die des zweiten Zeitabschnittes, so folgt-wegen der Gruppeneigenschaft (5.23)-die Transitionsmatrix nach Ablauf einer Periode T_p zu

$$\underline{\Phi}(t_0 + T_p, t_0) = e^{\underline{A}_2 (T_p - \tau_1)} \cdot e^{\underline{A}_1 \tau_1} \quad (5.34)$$

Die Teil-Übergangsmatrizen (5.32) und (5.33) in (5.34) können dabei mit den von der Theorie zeitinvarianter Systeme her bekannten Methoden bestimmt werden.

Die vergleichsweise einfache Ermittlung der Übergangsmatrix $\underline{\Phi}(t_0 + T_p, t_0)$ des stückweise konstanten periodischen Systems läßt die Verwendung der dargestellten Stabilitätskriterien besonders günstig erscheinen. Liegt dagegen eine mit der Zeit sich laufend ändernde Parametererregung vor, muß die Transitionsmatrix durch numerische Integration ermittelt werden. In diesem Fall kann ein anderes Stabilitätskriterium /18/, bei dem die Eigenschwingungen des periodisch zeitvarianten Systems untersucht werden, von Vorteil sein. Für den Sonderfall eines Systems 2. Ordnung mit einer sinusförmigen Parameteränderung läßt sich eine Beschreibung durch die MATHIEUSche Differentialgleichung, deren Stabilitätsbereiche auf der INCE-STRUTTSchen Stabilitätskarte angegeben sind, vornehmen.

6. STABILITÄTSUNTERSUCHUNG BEIM PERIODISCHEN SYSTEM

2. ORDNUNG

Behandelt werden solche Systeme, deren Parameter in Abhängigkeit von der Zeit zwei verschiedene Werte annehmen und dabei stückweise konstant sind.

Setzt man voraus, daß die Systeme mit den zeitkonstant gehaltenen Parameterwerten stabil sind, so ist das System 2. Ordnung dasjenige System niedrigster Ordnung, das bei zeitlicher Parameteränderung instabil werden kann. An ihm wird das Stabilitätsverhalten näher betrachtet, weil sich wegen der niedrigen Ordnung einige noch überschaubare Zusammenhänge ergeben. Zum Teil gestatten die dabei gewonnenen Ergebnisse Rückschlüsse auf das Verhalten von Systemen höherer Ordnung. Bevor aber mit dem System 2. Ordnung begonnen wird, soll zunächst kurz gezeigt werden, daß das System 1. Ordnung mit den genannten Voraussetzungen stets asymptotisch stabil ist.

Das nichterregte System 1. Ordnung wird beschrieben durch

$$\dot{z}(t) = -a_0(t) z \quad (6.1)$$

mit $a_0(t) > 0$ im gesamten Zeitbereich. Hat $z(t)$ zum Zeitpunkt t_0 den Wert $z(t_0) = z_0$, so ergibt sich für $t \geq t_0$ die Lösung

$$z(t) = z_0 e^{-\int_{t_0}^t a_0(\tau) d\tau} \quad (6.2)$$

Wegen $a_0(t) > 0$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0, \quad (6.3)$$

also asymptotische Stabilität.

6.1 Ermittlung der instabilen Bereiche

Das nichterregte System 2. Ordnung wird beschrieben durch die Zustandsgleichung

$$\dot{\underline{z}}(t) = \underline{A}_p(t) \underline{z}(t), \quad (6.4)$$

wobei die Systemmatrix $\underline{A}_p(t)$ in der Regelungs-Normalform

$$\underline{A}_p(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

gewählt wird. Die mit der Periode T_p zeitabhängigen Elemente $a_0(t)$ und $a_1(t)$ ändern sich in gleicher Weise zwischen zwei Werten zu ein und denselben Zeitpunkten, Bild 6.1.

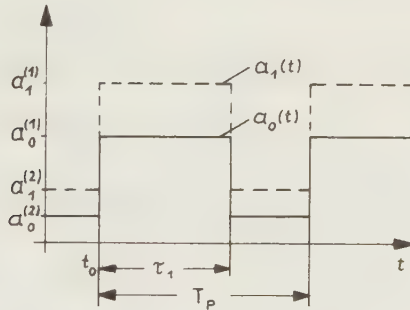


Bild 6.1

Die Systemmatrix $\underline{A}_p(t)$ nimmt also im Intervall $t_0 < t \leq t_0 + \tau_1$ den Wert

$$\underline{A}_{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0^{(1)} & -a_1^{(1)} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

und im Intervall $t_0 + \tau_1 < t < t_0 + T_p$ den Wert

$$\underline{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0^{(2)} & -a_1^{(2)} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

an. Damit lassen sich die Teilübergangsmatrizen

$$\underline{\Phi}_1 = \underline{\Phi}(t_0 + \tau_1, t_0) = e^{\underline{A}_1 \tau_1} \quad (6.8a)$$

und

$$\underline{\Phi}_2 = \underline{\Phi}(t_0 + T_p, t_0 + \tau_1) = e^{\underline{A}_2 (T_p - \tau_1)} \quad (6.8b)$$

angeben, und man erhält mit ihrem Produkt $\underline{\Phi}_2 \underline{\Phi}_1$ die Übergangsmatrix von (6.4) nach Ablauf einer Periode T_p zu

$$\underline{\Phi} = \underline{\Phi}(t_0 + T_p, t_0) = e^{\underline{A}_2 (T_p - \tau_1)} \cdot e^{\underline{A}_1 \tau_1} \quad (6.9)$$

Das periodische System 2. Ordnung ist asymptotisch stabil, wenn die Nullstellen λ_1 und λ_2 des charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda) = \det(\lambda \underline{E} - \underline{\Phi}) \quad (6.10)$$

im Innern des Einheitskreises der λ -Ebene liegen, vgl. Kapitel 5.2.

Ist

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix}, \quad (6.11)$$

so gilt

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (\varphi_{11} + \varphi_{22})\lambda + \varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21}. \quad (6.12)$$

Nach dem COHNschen Kriterium liegen die Nullstellen λ_1 und λ_2 genau dann im Innern des Einheitskreises der λ -Ebene, wenn

$$|\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21}| < 1 \quad (6.13a)$$

und

$$|\varphi_{11} + \varphi_{22}| < |1 + \varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21}| \quad (6.13b)$$

gilt.

Da das charakteristische Polynom vom 2. Grade ist, gelten zwischen seinen Koeffizienten und seinen Nullstellen die Zusammenhänge

$$\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21} = \lambda_1\lambda_2 \quad (6.14a)$$

$$\text{und} \quad \varphi_{11} + \varphi_{22} = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (6.14b)$$

Berücksichtigt man in (6.14a), daß $|\lambda_1| < 1$ und $|\lambda_2| < 1$ sein sollen, so folgt ebenfalls die Forderung (6.13a) des COHNSchen Kriteriums.

Zur Stabilitätsprüfung müssen die Ungleichungen (6.13a) und (6.13b) ausgewertet werden.

Verhältnismäßig einfach ist der Ausdruck $\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{21}\varphi_{12}$ zu bestimmen. Bei einem System 2. Ordnung gilt der Zusammenhang

$$\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21} = \det \underline{\Phi} \quad , \quad (6.15)$$

so daß sich mit

$$\underline{\Phi} = \underline{\Phi}_2 \cdot \underline{\Phi}_1$$

die Beziehung

$$\det \underline{\Phi} = \det \underline{\Phi}_2 \cdot \det \underline{\Phi}_1 \quad (6.16)$$

ergibt. Da $\underline{\Phi}_1$ und $\underline{\Phi}_2$ Übergangsmatrizen von linearen zeitinvarianten Systemen sind, gelten für ihre Determinanten ferner die Beziehungen /19/

$$\det \underline{\Phi}_1 = \det(e^{\underline{A}_1 \tau_1}) = e^{\text{sp}(\underline{A}_1) \tau_1} \quad (6.17)$$

$$\det \underline{\Phi}_2 = \det(e^{\underline{A}_2 (T_P - \tau_1)}) = e^{\text{sp}(\underline{A}_2) (T_P - \tau_1)} \quad , \quad (6.18)$$

wobei $\text{sp}(\cdot)$ die Spur der im Argument stehenden Matrix ist.

Setzt man (6.17) und (6.18) mit

$$\text{sp}(\underline{A}_1) = -a_1^{(1)}$$

$$\text{und} \quad \text{sp}(\underline{A}_2) = -a_1^{(2)}$$

in (6.16) ein, so erhält man

$$\det \underline{\Phi} = e^{-a_1^{(1)} \tau_1 - a_1^{(2)} (T_P - \tau_1)} \quad (6.19)$$

Da nach Voraussetzung

$$\alpha_1^{(1)} > 0 \text{ und } \alpha_1^{(2)} > 0 \quad (6.20)$$

ist, folgt für beliebige τ_1 und T_P :

$$0 < \det \underline{\Phi} < 1 \quad (6.21)$$

d.h. die Forderung (6.13a) des COHNschen Kriteriums ist stets erfüllt.

Während die Auswertung der Ungleichung (6.13a) ohne die aufwendige Bestimmung der Elemente von $\underline{\Phi}$ durchgeführt werden konnte, ist dagegen für (6.13b) die Kenntnis von φ_{11} und φ_{22} erforderlich. Ihre Ermittlung beginnt mit der Bestimmung der Teilübergangsmatrizen $\underline{\Phi}_1$ und $\underline{\Phi}_2$.

Sind

$$\tau_{1,2}^{(1)} = -D_1 \omega_{01} \pm j \omega_{D1} \quad (6.22)$$

die Eigenwerte der Matrix $\underline{A}_1$, wobei D_1 die Dämpfung, ω_{01} die Kennkreisfrequenz und

$$\omega_{D1} = \omega_{01} \sqrt{1 - D_1^2} \quad (6.23)$$

die Resonanzkreisfrequenz bedeutet, so ergibt sich $\underline{\Phi}_1$ zu

$$\underline{\Phi}_1 = e^{-D_1 \omega_{01} \tau_1} \begin{bmatrix} \cos \omega_{D1} \tau_1 + D_1 \frac{\omega_{01}}{\omega_{D1}} \sin \omega_{D1} \tau_1 & \frac{1}{\omega_{D1}} \sin \omega_{D1} \tau_1 \\ -\frac{\omega_{01}^2}{\omega_{D1}} \sin \omega_{D1} \tau_1 & \cos \omega_{D1} \tau_1 - D_1 \frac{\omega_{01}}{\omega_{D1}} \sin \omega_{D1} \tau_1 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

Sind

$$\tau_{1,2}^{(2)} = -D_2 \omega_{02} \pm j \omega_{D2} \quad (6.25)$$

mit $\omega_{D2} = \omega_{02} \sqrt{1 - D_2^2}$ die Eigenwerte der Matrix $\underline{A}_2$, dann erhält man $\underline{\Phi}_2$, indem in (6.24) der Index 1 bei allen Elementen durch 2 und die Zeit τ_1 durch $T_P \tau_1$ ersetzt wird.

Die Elemente φ_{11} und φ_{22} der resultierenden Übergangsmatrix ergeben sich aus den Elementen $\varphi_{\nu\mu}^{(1)}$ von $\underline{\Phi}_1$ und $\varphi_{\nu\mu}^{(2)}$ von $\underline{\Phi}_2$ zu

$$\varphi_{11} = \varphi_{11}^{(1)} \varphi_{11}^{(2)} + \varphi_{21}^{(1)} \varphi_{12}^{(2)} \quad (6.26a)$$

und

$$\varphi_{22} = \varphi_{12}^{(1)} \varphi_{21}^{(2)} + \varphi_{22}^{(1)} \varphi_{22}^{(2)} \quad (6.26b)$$

Mit diesen Ergebnissen kann nun die Ungleichung (6.13b) in auswertbarer Form dargestellt werden. Ersetzt man φ_{11} und φ_{22} auf der linken Seite der Ungleichung (6.13b) durch (6.26) mit den in (6.24) explizit angegebenen Elementen $\varphi_{\nu\mu}^{(1)}$ und $\varphi_{\nu\mu}^{(2)}$ und berücksichtigt ferner (6.15) auf der rechten Seite von (6.13b), so ergibt sich nach kurzer Rechnung mit einigen trigonometrischen Umwandlungen die Ungleichung:

$$\left| (1+k) \cos \left\{ \left[\left(\frac{\omega_{21}}{\omega_{22}} + 1 \right) \frac{\tau_1}{T_p} - 1 \right] \omega_{D2} T_p \right\} + (1-k) \cos \left\{ \left[\left(\frac{\omega_{21}}{\omega_{22}} - 1 \right) \frac{\tau_1}{T_p} + 1 \right] \omega_{D2} T_p \right\} \right| \sqrt{\det \underline{\Phi}} < 1 + \det \underline{\Phi} \quad (6.27a)$$

$$\text{mit} \quad k = \frac{D_1 D_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}} + \frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} \right)}{\sqrt{(1-D_1^2)(1-D_2^2)}} \quad (D_1 < 1, D_2 < 1) \quad (6.27b)$$

und

$$\det \underline{\Phi} = e^{-2 \left[D_1 \omega_{01} - D_2 \omega_{02} \right] \tau_1 - 2 D_2 \omega_{02} T_p} \quad (6.27c)$$

wegen (6.20).

Da die Bedingung (6.13a) des COHNschen Kriteriums mit den angegebenen Voraussetzungen stets befriedigt wird, kann sich die Stabilitätsuntersuchung eines Systems 2. Ordnung darauf beschränken, zu prüfen, ob Ungleichung (6.27a) erfüllt ist.

$$\begin{aligned} \text{Für} \quad & \omega_{01} D_1 = \omega_{02} D_2 \\ \text{und} \quad & D_2 = 0,5 \end{aligned} \tag{6.28}$$

ist in Abhängigkeit des Tastverhältnisses $\gamma = \tau_1/T_p$ und bei verschiedenen Werten von $\omega_{D2} T_p$ und ω_{01}/ω_{02} die Ungleichung (6.27a) numerisch ausgewertet und das Ergebnis in Form von zwei Stabilitätskarten festgehalten worden. Bei der 1. Karte, Bild 6.2, wird das Tastverhältnis γ im Bereich $[0,1]$ und $\omega_{D2} T_p$ im Bereich $[0; 1,5]$ variiert, während $\omega_{01}/\omega_{02} = 10$ ist. Bei der 2. Karte, Bild 6.3, wird anstelle von $\omega_{D2} T_p$, das jetzt den festen Wert $\omega_{D2} T_p = 1$ hat, ω_{01}/ω_{02} im Bereich $[1,20]$ verändert. Die stabilen Bereiche sind auf den Karten punktiert hervorgehoben. Bei den Werten $\tau_1/T_p = 0$ bzw. $\tau_1/T_p = 1$ liegt natürlich Stabilität vor, da dort das System zeitinvariant mit der Matrix $\underline{A}_2$ bzw. $\underline{A}_1$ ist. Bemerkenswert ist das Auftreten mehrerer sich einander abwechselnder stabiler und instabiler Bereiche, ähnlich wie bei der INCE-STRUTTschen Stabilitätskarte der MATHIEUschen Differentialgleichung. Aus den Stabilitätskarten kann man entnehmen, daß die Zahl der instabilen und stabilen Bereiche entlang dem Tastverhältnis um so größer ist, je größer das Frequenzverhältnis ω_{01}/ω_{02} oder das Produkt aus Periodendauer T_p und Resonanzkreisfrequenz ω_{D2} ist.

Treten in einem Schaltzustand reelle und verschiedene Eigenwerte $\tau_{1,2}$ auf, so ist die Ungleichung (6.27a) zur numerischen Auswertung nicht unmittelbar geeignet, da wegen $D > 1$ dann ω_D und k imaginär sind. Für diesen Fall, bei dem ohne Beschränkung der Allgemeinheit die reellen Eigenwerte der Matrix $\underline{A}_2$ zugeordnet werden, ist aus (6.27a) unter Berücksichtigung von

$$\omega_{D2} = j \omega_{02} \sqrt{D_2^2 - 1} \tag{6.29a}$$

und

$$k = j h = j \frac{D_1 D_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}} + \frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} \right)}{\sqrt{(1-D_1^2) (D_2^2 - 1)}} \tag{6.29b}$$

die Ungleichung

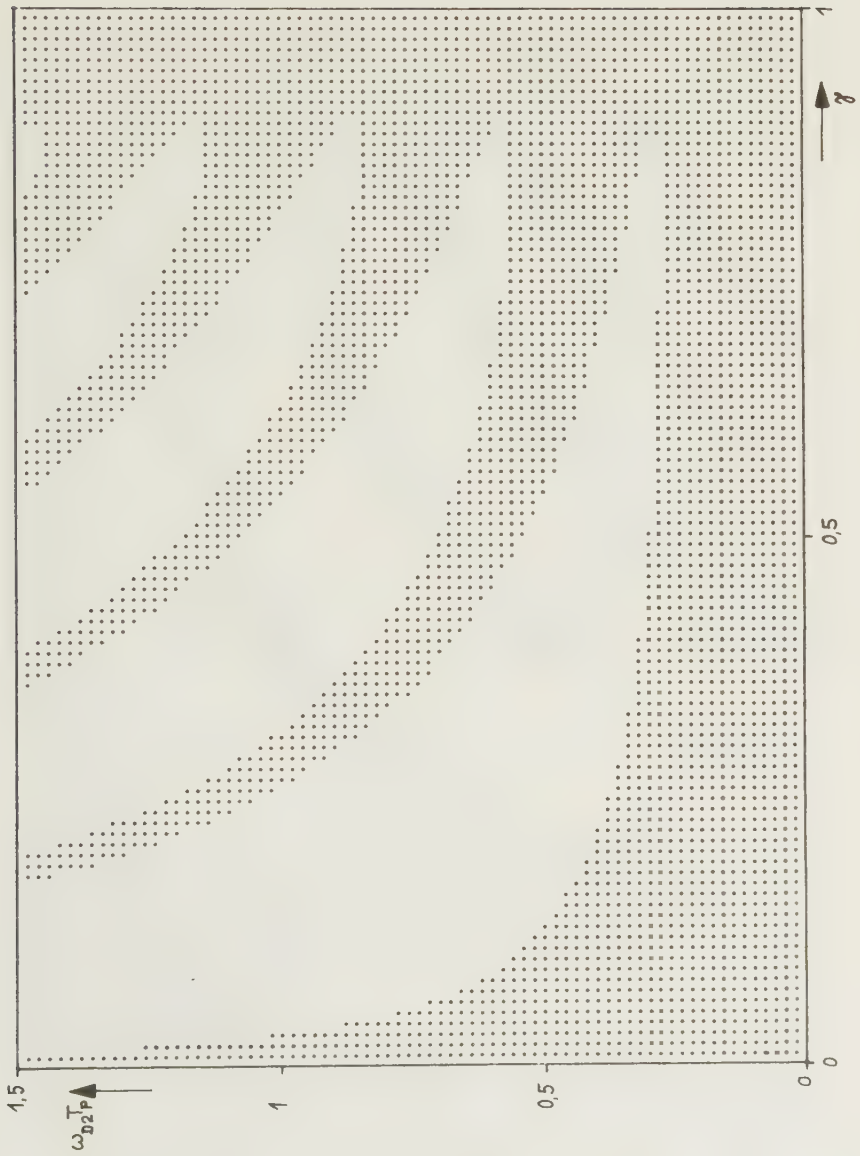


Bild 6.2

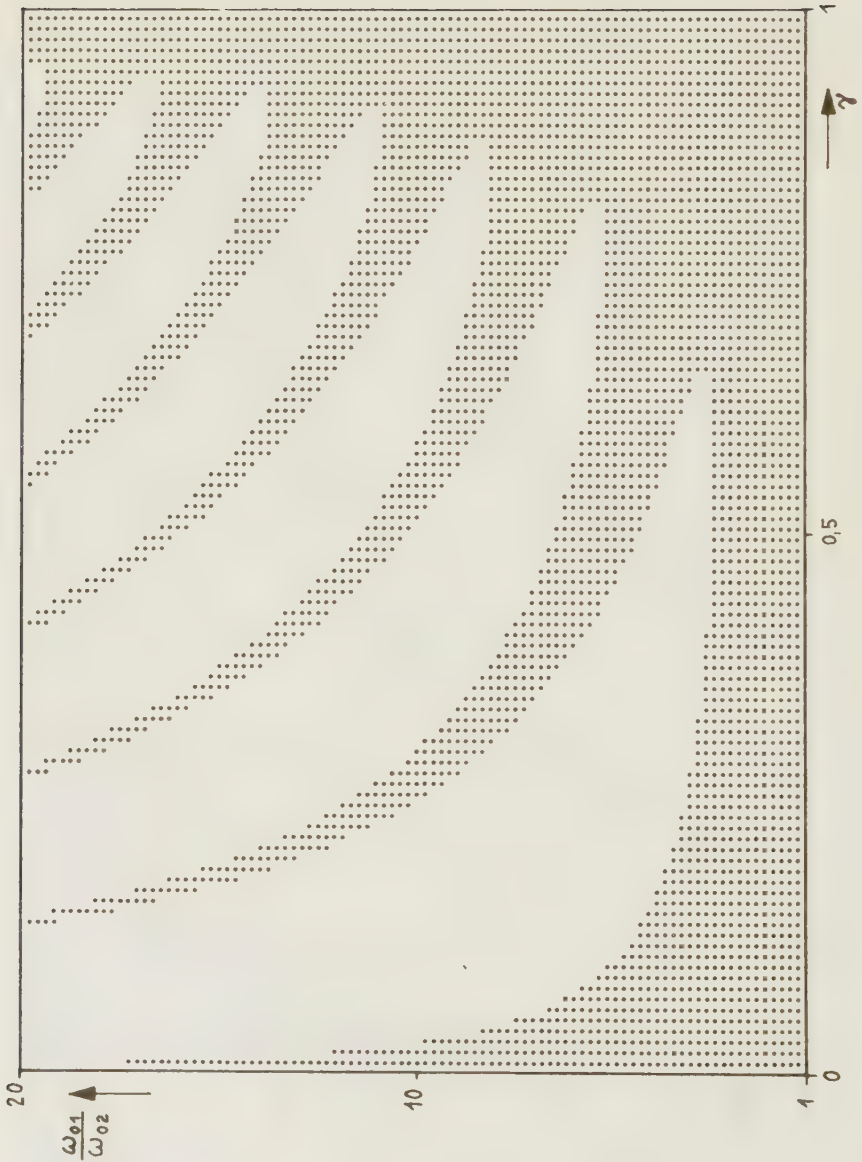


Bild 6.3

$$\begin{aligned}
 & \left[e^{|\omega_{D2}|T_P(1-\gamma)} + e^{-|\omega_{D2}|T_P(1-\gamma)} \right] \cos \omega_{D1}\tau_1 \\
 & + h \left[e^{|\omega_{D2}|T_P(1-\gamma)} - e^{-|\omega_{D2}|T_P(1-\gamma)} \right] \sin \omega_{D1}\tau_1 \Big| \sqrt{\det \underline{\Phi}} \\
 & < 1 + \det \underline{\Phi} \quad (D_1 < 1, D_2 > 1) \quad (6.29c)
 \end{aligned}$$

hergeleitet worden.

Später wird die Stabilität eines periodischen Systems mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 a_1^{(1)} &= a_1^{(2)} = 1 \text{ sec}^{-1} \\
 a_0^{(2)} &= 0
 \end{aligned}$$

und verschiedenen Werten des Koeffizienten $a_0^{(1)}$ aus dem Intervall $[1 \text{ sec}^{-2}, 100 \text{ sec}^{-2}]$ bei einer Parametererregung mit den Perioden

$$T_P = 0,715 \text{ sec und } 2,5 \text{ sec}$$

in Abhängigkeit des Tastverhältnisses γ von Interesse sein, weswegen hierfür die Stabilitätskarten angegeben worden sind, Bild 6.4 und 6.5.

Eine weitere Ungleichung für den Fall, daß das periodische System in beiden Schaltzuständen reelle Eigenwerte hat, ist nicht erforderlich, da sich durch eine Betrachtung in der Phasenebene zeigen läßt, daß dann stets asymptotische Stabilität vorliegt. Für diese Überlegungen wird die folgende Eigenschaft von Trajektorien zeitinvarianter Systeme benötigt.

Sind die Eigenwerte η_1 und η_2 eines zeitinvarianten Systems 2. Ordnung reell mit

$$\eta_2 < \eta_1 < 0, \quad (6.30)$$

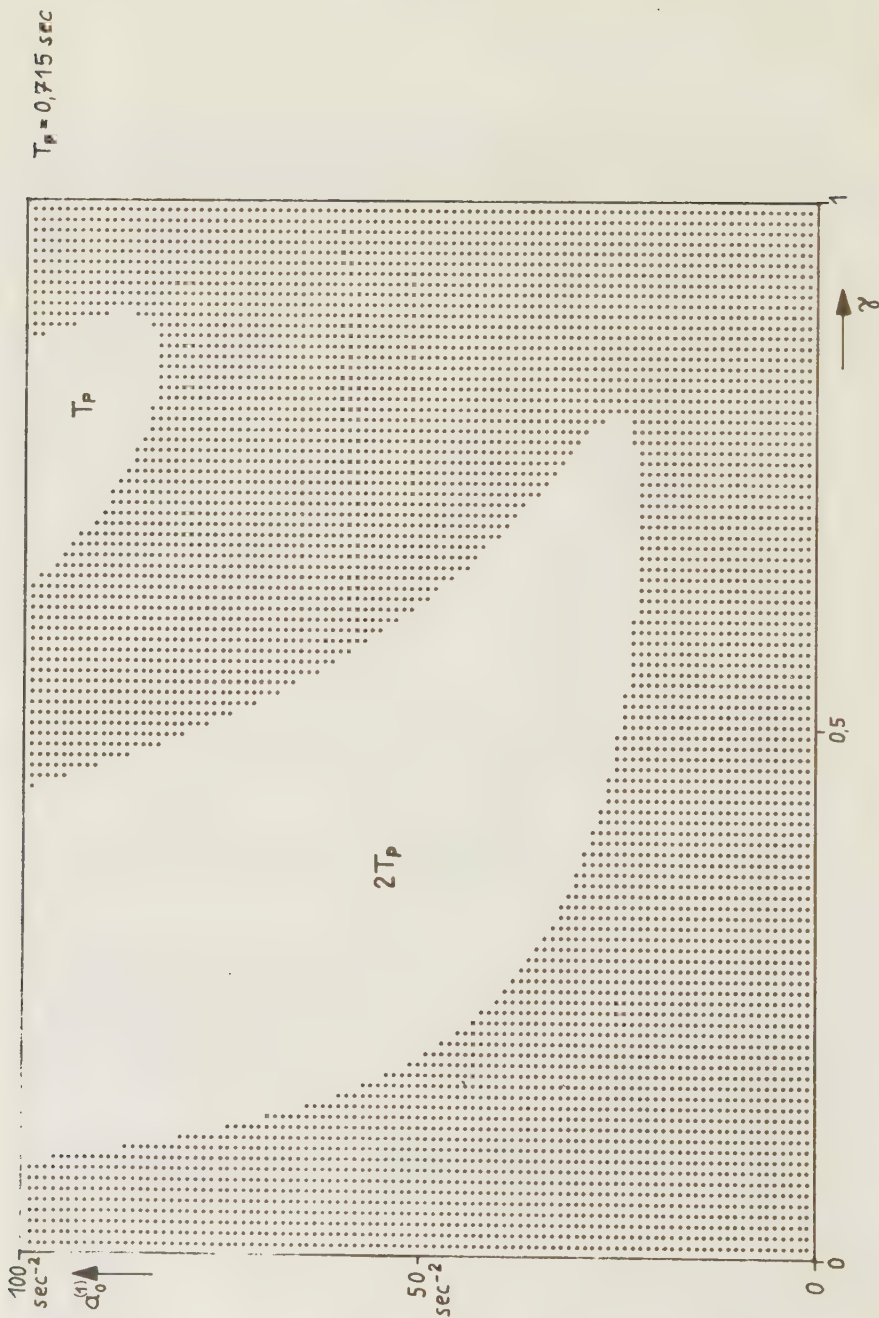


Bild 6.4

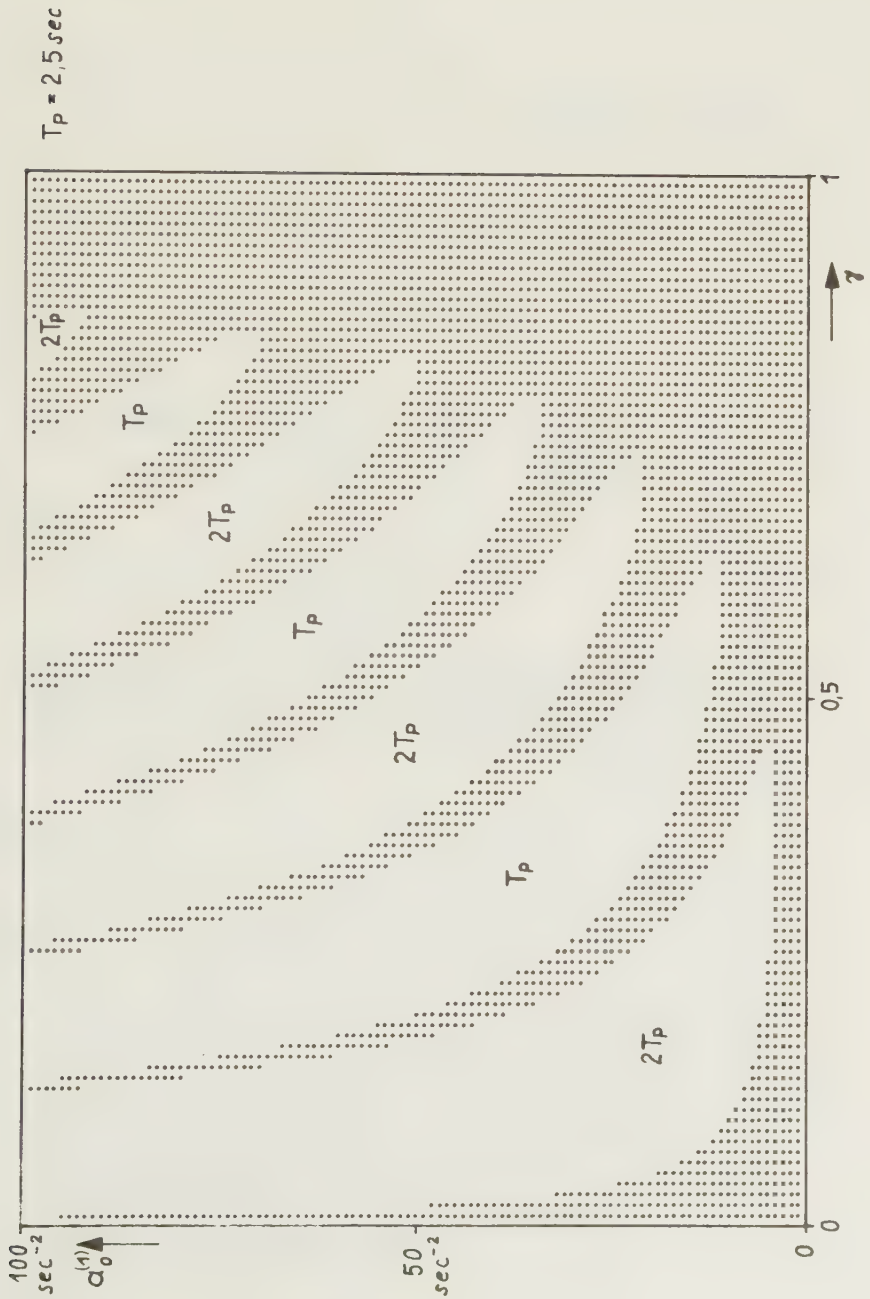


Bild 6.5

so laufen die Trajektorien in der $(z_1, \dot{z}_1)$ - Phasenebene für $t \rightarrow \infty$ asymptotisch zu der Geraden

$$\dot{z}_1 = \eta_1 z_1 \quad (6.31)$$

in den Nullpunkt, ohne sie vorher einmal geschnitten zu haben.

Die Erklärung dafür kann mit Hilfe der durch

$$\dot{\tilde{z}}_1 = \eta_1 \tilde{z}_1 \quad (6.32a)$$

$$\text{und} \quad \dot{\tilde{z}}_2 = \eta_2 \tilde{z}_2 \quad (6.32b)$$

definierten Zustandsebene gefunden werden, in der die Trajektorien von einem beliebigen Anfangspunkt $(\tilde{z}_{10}, \tilde{z}_{20})$ aus einen durch

$$\tilde{z}_1 = \tilde{z}_{10} e^{\eta_1 t} \quad (6.33a)$$

$$\text{und} \quad \tilde{z}_2 = \tilde{z}_{20} e^{\eta_2 t} \quad (6.33b)$$

festgelegten Verlauf haben. Die Trajektorien bewegen sich hier also ausschließlich in den Quadranten, die durch die Anfangspunkte gegeben sind, und laufen für $t \rightarrow \infty$ wegen (6.30) asymptotisch zur $\tilde{z}_1$ -Koordinate in den Nullpunkt. Da andererseits die beiden Zustandsebenen durch die linearen Gleichungen

$$z_1 = \frac{1}{\eta_1 - \eta_2} (\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2) \quad (6.34a)$$

und

$$\dot{z}_1 = \frac{1}{\eta_1 - \eta_2} (\eta_1 \tilde{z}_1 - \eta_2 \tilde{z}_2) \quad (6.34b)$$

miteinander verknüpft sind, wird in der $(z_1, \dot{z}_1)$ -Phasenebene die $\tilde{z}_1$ -Koordinate durch (6.31) beschrieben.

Der Zustandspunkt des geschalteten Systems (6.4) bewegt sich in der Phasenebene abwechselnd auf den Trajektorien der zeitinvarianten Systeme mit den Matrizen $\underline{A}_1$ und $\underline{A}_2$. Zur Veranschaulichung des Sachverhalts ist im Bild 6.6. eine Phasenebene mit den Trajektorien der Systeme $\underline{A}_1$ und $\underline{A}_2$ dargestellt, für die der aperiodische Grenzfall mit

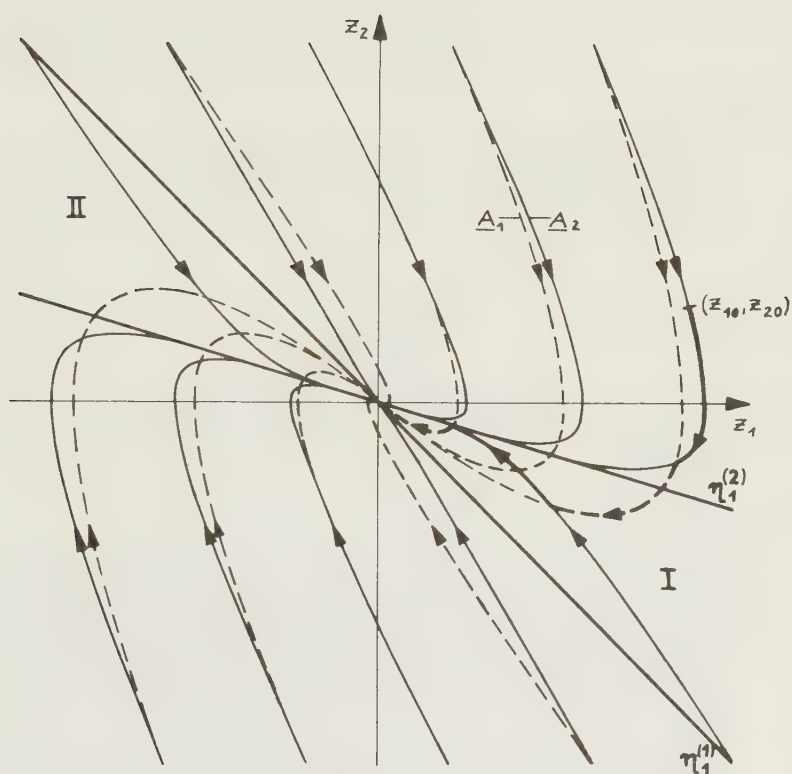


Bild 6.6

$$a_0^{(1)} = 1 \text{ sec}^{-2}$$

$$a_1^{(1)} = 2 \text{ sec}^{-1}$$

und ein aperiodischer Fall mit

$$a_0^{(2)} = 0,5 \text{ sec}^{-2}$$

$$a_1^{(2)} = 2 \text{ sec}^{-1}$$

gewählt wurde.

Gemäß der erwähnten Eigenschaft von Trajektorien zeitinvarianter Systeme laufen die Trajektorien von $\underline{A}_1$ zu der Geraden

$$z_2 = z_1 = \eta_1^{(1)} z_1 \quad (6.35)$$

mit $\eta_1^{(1)} = -1 \text{ sec}^{-1}$ und die Trajektorien von $\underline{A}_2$ zu der Geraden

$$z_2 = z_1 = \eta_1^{(2)} z_1 \quad (6.36)$$

mit $\eta_1^{(2)} = -0,293 \text{ sec}^{-1}$ asymptotisch für $t \rightarrow \infty$ in den Koordinaten-Nullpunkt.

Von einem gewählten Anfangswert (z_{10}, z_{20}) aus läuft der Zustandspunkt des geschalteten Systems abwechselnd auf einer Trajektorie von $\underline{A}_1$ oder $\underline{A}_2$ und wandert dabei nach einer gewissen Zeit in einen der beiden durch die Geraden (6.35) und (6.36) eingeschlossenen Sektoren I und II, vgl. dick ausgezogenen Verlauf. Aus diesen Sektoren kommt der Zustandspunkt nicht mehr heraus, weil die Trajektorien, die eine der Geraden schneiden, sich der jeweils anderen asymptotisch nähern, ohne den Sektor je wieder zu verlassen. In den Sektoren muß der Zustandspunkt zum Ursprung des Koordinatensystems laufen, da die Sektoren stets im 2. und 4. Quadranten liegen, wo also z_1 und $\dot{z}_1$ ungleiche Vorzeichen haben.

Der Bewegungsablauf des Zustandspunktes endet dabei unabhängig von der Zeitfolge der Systemumschaltungen stets im Koordinatenursprung, so daß Periodizität der Parametererregung nicht vorausgesetzt werden muß. Da-

her sind auch bei dem als Beispiel dick ausgezogenen Bewegungsablauf die Umschaltungen nicht periodisch vorgenommen worden.

Diese Ausführung besagt, daß eine Stabilitätsuntersuchung nur dann anzustrengen ist, wenn von einer der beiden Matrizen $\underline{A}_1$ und $\underline{A}_2$ die Eigenwerte komplex sind. Für den Fall, daß sich nur a_0 zeitlich ändert, braucht die Stabilität mit einer der beiden Ungleichungen (6.27a) und (6.29c) sogar erst dann geprüft zu werden, wenn

$$a_0^{(1)} > 2,9 a_1^2 \quad (6.37)$$

mit $a_1 = a_1^{(1)} = a_1^{(2)}$ ist. Nach BROCKET /20/ ist nämlich das System 2. Ordnung mit einem nichtnegativen und beschränkten, sonst beliebig zeitabhängigen Parameter $a_0(t)$,

$$0 \leq a_0(t) \leq a_{0 \max} \quad ,$$

stets stabil, wenn $a_{0 \max} < 2,9 a_1^2$

ist. Dieses hinreichende Kriterium folgt ebenfalls aus einer Betrachtung der Phasenebene. An Hand der Steigung

$$\frac{dz_2}{dz_1} = \frac{z_2}{z_1} = -a_1 - a_0(t) \frac{z_1}{z_2} \quad (6.38)$$

der Trajektorien ergibt sich, daß ein Zustandspunkt, der seine Bewegung auf der z_2 -Achse beginnt, genau dann den größten Wert auf der z_1 -Achse erreicht, wenn während des gesamten Verlaufs im 1. Quadranten

$$a_0(t) \equiv 0$$

ist, Bild 6.7. Wenngleich dieser Wert auch erst für $t \rightarrow \infty$ angenommen wird, so stellt er doch eine obere Schranke dar. Ferner hat eine Trajektorie, die auf der z_1 -Achse beginnt, dann den größten Abstand vom Koordinaten-Nullpunkt auf der z_2 -Achse, wenn im 4. Quadranten stets

$$a_0(t) \equiv a_{0 \max}$$

ist.

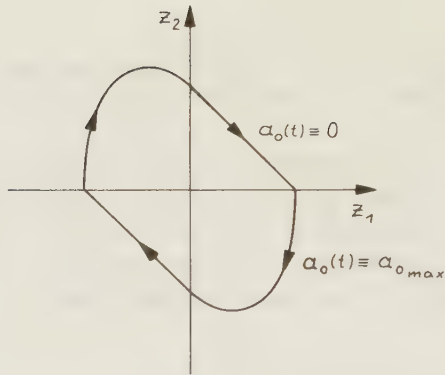


Bild 6.7

Im 3. und 2. Quadranten sind die Verhältnisse analog zu denen im 1. und 4. Quadranten. Mit den Gleichungen für die Trajektorien kann man nun denjenigen Wert für $a_{0\max}$ bestimmen, bei dem sich gerade ein geschlossener Zyklus ergibt. Das ist bei

$$a_{0\max} \approx 2,9 a_1^2$$

der Fall.

6.2 Das Verhalten innerhalb und am Rande der instabilen Bereiche

Wie bei der MATHIEUSchen Differentialgleichung ist auch hier von Interesse, insbesondere für spätere Betrachtungen, mit welcher Periode das stückweise konstante periodische System 2. Ordnung am Stabilitätsrand schwingt bzw. welche periodische Komponente die aufklingende Schwingung im instabilen Gebiet besitzt.

Die Übergangsmatrix $\underline{\Phi}(t, t_0)$ eines periodisch zeitvarianten Systems läßt sich in der Form

$$\underline{\Phi}(t, t_0) = \underline{P}(t, t_0) e^{\underline{L}(t-t_0)} \quad (6.39a)$$

darstellen, wobei $\underline{P}(t, t_0)$ eine mit der Periode T_p periodische Matrix

$$\underline{P}(t, t_0) = \underline{P}(t+T_p, t_0) = \underline{P}(t, t_0+T_p) \quad (6.39b)$$

und $\underline{L}$ durch die Beziehung

$$\underline{\Phi}(t_0 + T_P, t_0) = e^{\underline{L} T_P} \quad (6.39c)$$

definiert ist /13/.

Ferner kann aus einigen, im vorangegangenen Abschnitt hergeleiteten Beziehungen die Lage der Eigenwerte von $\underline{\Phi}(t_0 + T_P, t_0)$ und damit auch von $\underline{L}$ am Stabilitätsrand ermittelt werden.

Als erstes läßt sich feststellen, daß komplexe Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ von $\underline{\Phi}(t_0 + T_P, t_0)$, die dann konjugiert komplex auftreten, stets im Einheitskreis liegen. Es folgt nämlich mit

$$\lambda_1 \lambda_2 = |\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 \quad (6.40)$$

und dem Ergebnis (6.21), daß

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1 \quad (6.41)$$

gilt. Infolgedessen sind am Stabilitätsrand oder bei Instabilität die Eigenwerte immer reell; also aus

$$|\lambda_v| \geq 1 \Rightarrow \lambda_v \text{ reell} \quad (v = 1, 2) \quad (6.42)$$

Außerdem haben die reellen Eigenwerte wegen (6.40) gleiches Vorzeichen. Am Stabilitätsrand kann in der λ -Ebene entweder ein Eigenwert bei

$$\textcircled{1} \quad \lambda_1 = -1 \text{ oder } \textcircled{2} \quad \lambda_1 = +1$$

liegen. Der zugehörige zweite Eigenwert folgt dann aus (6.19) zu

$$\textcircled{1} \quad \lambda_2 = -e^{-\sigma} \text{ oder } \textcircled{2} \quad \lambda_2 = e^{-\sigma}$$

wobei

$$\sigma = [a_1^{(1)} - a_1^{(2)}] \tau_1 + a_1^{(2)} T_P$$

ist. Die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ der Matrix $\underline{L}$ sind über den Zusammenhang

$$\lambda = e^{\kappa T_p} \quad (6.43)$$

mit den Eigenwerten $\lambda_{1,2}$ verknüpft und ergeben sich daher zu

$$\textcircled{1} \quad \kappa_1 = j \frac{\pi}{T_p} \quad , \quad \kappa_2 = -\sigma + j \frac{\pi}{T_p}$$

$$\textcircled{2} \quad \kappa_1 = 0 \quad , \quad \kappa_2 = -\sigma$$

Die komplexen Eigenwerte $\kappa_{1,2}$ sind nicht konjugiert komplex, weil die Elemente von $\underline{L}$ komplex sind. Für die zwei Fälle $\textcircled{1}$ und $\textcircled{2}$ ist die Lage der Eigenwerte in der λ - und κ -Ebene einmal dargestellt, Bild 6.8a,b.

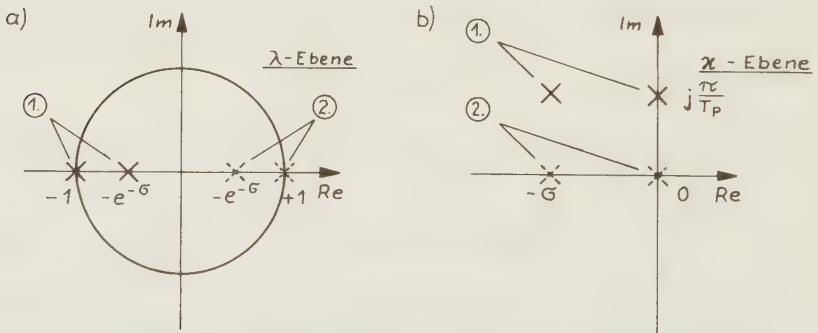


Bild 6.8

Aufgrund dieser Werte für $\kappa_{1,2}$ enthalten die Elemente der Matrix $e^{\underline{L}(t-t_0)}$ neben exponentiell abklingenden Termen noch harmonische Terme mit der Periode

$$T^* = 2 T_p \quad (6.44)$$

im 1. Fall und konstante Terme im 2. Fall. Demnach überträgt sich im 2. Fall wegen (6.39a) die Periode von $\underline{p}(t, t_0)$ direkt auf $\underline{\Phi}(t, t_0)$. Im 1. Fall ist für die Bestimmung der Periode noch eine Zwischenüberlegung

erforderlich. Denkt man sich die Elemente von $\underline{P}(t, t_0)$ in trigonometrische Reihen mit den Kreisfrequenzen $\nu\omega$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$; $\omega = \frac{2\pi}{T_p}$) zerlegt, und berücksichtigt man, daß die Elemente von $\underline{e}^{\underline{L}(t-t_0)} \underline{T}_p$ Terme mit $\sin \frac{\omega}{2} t$ oder $\cos \frac{\omega}{2} t$ enthalten, so folgt für das Matrizenprodukt (6.39a) ein Linienspektrum mit den Kreisfrequenzen

$$\Omega = (2\nu \pm 1) \frac{\omega}{2} \quad (6.45)$$

Die Elemente von $\underline{\Phi}(t, t_0)$ enthalten also im 1. Fall Grundschwingungen mit der Kreisfrequenz $\omega/2$ sowie ungeradzahlige Oberwellen und im 2. Fall Grundschwingungen mit der Kreisfrequenz ω sowie gerad- und ungeradzahlige Oberwellen.

Es stellt sich die Frage, welcher der beiden Fälle an den Rändern der verschiedenen instabilen Bereiche in den Stabilitätskarten auftreten. Wenn sich das periodische System am Stabilitätsrand befindet, liegt in der Phasenebene ein geschlossener Zyklus vor. Er kann dadurch entstehen, daß ein bei t_0 in $\underline{z}(t_0)$ sich selbst überlassener Zustandspunkt nach Ablauf einer Periode T_p , innerhalb der eine Systemumschaltung und damit ein Trajektorienwechsel erfolgt,

1. den am Koordinatenursprung gespiegelten Ausgangspunkt nach $\frac{\nu}{2}$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) oder
2. den Ausgangspunkt selbst nach μ ($\mu = 1, 2, 3, \dots$)

Umläufen des Nullpunktes erreicht. Im 1. Fall kehrt der Zustandspunkt dann nach Ablauf einer weiteren Periode T_p zum Ausgangspunkt zurück. Die Anzahl der Umläufe hängt dabei von der Tasterperiode T_p im Vergleich zu den Perioden $T_{01} = \frac{2\pi}{\omega}$ und $T_{02} = \frac{2\pi}{\omega_{02}}$ der Eigenschwingungen und von den Dämpfungen D_1 und D_2^{01} der zeitinvarianten Teilsysteme ab.

Offenbar stimmt dieser 1. Fall mit dem vorgenannten 1. Fall überein, da der Zyklus die Periode $T^* = 2T_p$ und die Symmetrie

$$\underline{z}(t + \frac{T^*}{2}) = -\underline{z}(t) \quad (6.46)$$

besitzt, was bedeutet, daß die zugehörigen Zeitfunktionen $z_1(t)$ und $z_2(t)$

sich aus einer Grundschiwingung mit der Kreisfrequenz $\omega/2$ und ungeradzahligen Oberwellen zusammensetzen. Desgleichen besteht Übereinstimmung zwischen den beiden 2. Fällen.

In welcher Reihenfolge bilden sich die Zyklen bei konstanter Periode T_p in Abhängigkeit von τ_1 aus? Bei $\tau_1 = 0$ liegt das zeitinvariante System mit der Matrix $\underline{A}_2$ vor. Ein Zustandspunkt bewegt sich dann während einer Periode T_p nur auf einer Trajektorie dieses Systems, wobei er einen Winkel von

$$\alpha = q\pi$$

überstreicht. Für $\tau_1 > 0$ wird bei $T_p - \tau_1$ auf das System mit der Matrix $\underline{A}_1$ umgeschaltet, und der Zustandspunkt setzt seine Bewegung auf einer Trajektorie von $\underline{A}_1$ bis zum Ende der Periode T_p fort, Bild 6.9.

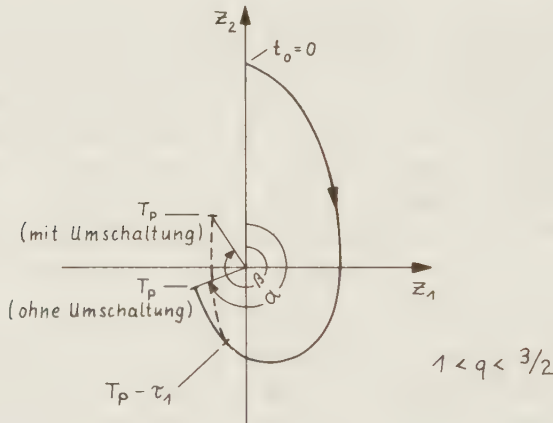


Bild 6.9

Da den Stabilitätskarten ein System zugrunde liegt, bei dem nur der Koeffizient a_0 geschaltet wird, und da außerdem nach Voraussetzung

$$a_0^{(1)} > a_0^{(2)}$$

gilt, ist der von den Trajektorien des geschalteten Systems überstrichene Winkel β am Ende einer Periode größer als der Winkel α .

Beginnt der Zustandspunkt seine Bewegung zum Zeitpunkt t_0 , so weist mit steigendem τ_1 der Zustandsvektor $\underline{z}(t_0 + T_p)$ am Ende der Periode zuerst in die Richtung von

- $-\underline{z}(t_0)$, dann von $\underline{z}(t_0)$ usw., wenn $2\nu < q < 2\nu + 1$
- $+\underline{z}(t_0)$, dann von $-\underline{z}(t_0)$ usw., wenn $2\nu + 1 \leq q < 2\nu + 2$

gilt bei $\nu = 0, 1, 2, \dots$. Andererseits nimmt bei jedem halben Umlauf in der Phasenebene die Länge des Zustandsvektors um einen bestimmten Betrag ab, so daß der bei steigenden τ_1 -Werten zuerst auftretende geschlossene Zyklus sich genau dort ausbilden muß, wo die Richtung von $\underline{z}(t_0 + T_p)$ das erstemal mit der von $-\underline{z}(t_0)$ oder $+\underline{z}(t_0)$ übereinstimmt. Infolgedessen bildet sich zuerst ein Zyklus mit der Periode $2T_p$ oder T_p aus, je nachdem ob q im Intervall $2\nu \leq q < 2\nu + 1$ oder $2\nu + 1 \leq q < 2\nu + 2$ liegt.

Befindet sich q im vorgenannten ersten Intervall, dann gehören zum zuerst auftretenden Zyklus die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -1 \text{ und } \lambda_2 = -e^{-\vartheta},$$

wobei $\vartheta = a_0^{(2)} T_p$ wegen $a_1^{(1)} = a_1^{(2)}$ ist. Mit weiter zunehmendem τ_1 folgt in der Stabilitätskarte auf den Stabilitätsrand ein instabiles Gebiet, z.B. Bild 6.5, sofern der Stabilitätsrand nicht nur tangiert worden ist. Demnach wandert λ_1 auf der negativ reellen Achse der λ -Ebene nach außen und λ_2 nach innen, Bild 6.10.

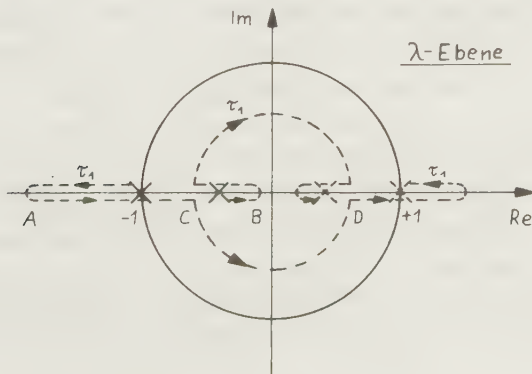


Bild 6.10

Da die Summe der Eigenwerte λ_1 und λ_2 beschränkt ist, verläuft die Bewegung bis zu den Umkehrpunkten A und B. Danach wandern λ_1 und λ_2 aufeinander zu, und λ_1 tritt wieder bei $\lambda_1 = -1$ in den stabilen Bereich ein, wobei λ_2 den ursprünglichen Wert annimmt. Wird τ_1 weiter erhöht, so bewegen sich die Eigenwerte bis zum Punkt

$$C = -e^{-\frac{1}{2} a_0^{(2)} T_P},$$

treten dort aus der reellen Achse heraus und wandern auf einem Kreis bis zum Punkt D der positiv reellen Achse, von wo aus der eine wieder nach innen und der andere nach außen läuft. Existiert ein zweiter instabiler Bereich, dann verläuft die Bewegung der Eigenwerte auf der positiv reellen Achse in entsprechender Weise wie auf der negativ reellen Achse. Bei einem dritten instabilen Bereich geht es wieder auf die linke Seite usw..

Insgesamt läßt sich feststellen, daß den instabilen Bereichen in den Stabilitätskarten mit steigendem Tastverhältnis τ_1/T_P abwechselnd die Eigenwerte

$$\lambda_1 \leq -1, \lambda_2 \text{ im Einheitskreis}$$

und

$$\lambda_1 \geq +1, \lambda_2 \text{ im Einheitskreis}$$

zuzuordnen sind; beginnend mit $\lambda_1 \leq -1$, wenn q im Intervall $2\nu \leq q \leq 2\nu+1$ ($\nu = 0,1,2,\dots$) liegt, sonst mit $\lambda_1 \geq +1$.

Unter Berücksichtigung des zu Beginn dieses Abschnittes angegebenen Zusammenhanges zwischen den Eigenwerten und den Eigenbewegungen des periodischen Systems läßt sich jetzt feststellen, daß auf dem Rand des

1. instabilen Bereiches Schwingungen mit der Periode $2T_P$
2. instabilen Bereiches Schwingungen mit der Periode T_P
3. instabilen Bereiches Schwingungen mit der Periode $2T_P$

usw. auftreten, wenn $2\nu \leq q \leq 2\nu+1$ ist, sonst in umgekehrter Reihenfolge. Innerhalb der instabilen Bereiche besitzt das System aufklingende Schwingungen. Sie enthalten als Faktoren periodische Schwingungen, deren Periode mit den Schwingungen auf den Rändern übereinstimmt.

Das dargestellte Stabilitätsverhalten ist ganz ähnlich wie bei der MATHIEUschen Differentialgleichung. Auch dort treten abwechselnd Eigenschwingungen mit den Perioden $2T_p$ und T_p auf, allerdings in Abhängigkeit von dem Mittelwert der Parametererregung.

Den Stabilitätskarten Bild 6.4 und 6.5 liegt ein periodisches System zugrunde, das im Schaltzustand mit der Matrix A_2 wegen $a_1^{(2)} > 0$ und $a_0^{(2)} = 0$ ein integrierendes System mit einer Verzögerung darstellt. Dafür läßt sich q durch eine kurze Überlegung bestimmen, womit dann die Perioden T_p und $2T_p$ den instabilen Bereichen zugeordnet werden können.

Das Phasenporträt des integrierenden Systems mit einer Verzögerung besteht aus zwei negativ geneigten Geradenscharen, von denen die eine in der oberen und die andere in der unteren Hälfte der Phasenebene verläuft, während beide für $t \rightarrow \infty$ auf der Abszisse enden, Bild 6.11.

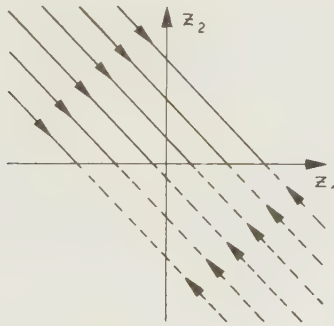


Bild 6.11

Demnach bleibt ein Zustandspunkt für alle Zeiten in derjenigen Halbebene, in der er seine freie Bewegung begonnen hat, woraus

$$q < 1/2$$

folgt. Damit kann in den Stabilitätskarten Bild 6.4 und 6.5 bei zunehmendem Tastverhältnis dem zuerst auftretenden instabilen Bereich die Periode $2T_p$, dem folgenden die Periode T_p usw. zugeordnet werden.

Neben der Feststellung der Periodendauer können noch weitere Angaben über die Form der Zyklen auf den verschiedenen Stabilitätsrändern gemacht werden. Es folgt nämlich aus den angestellten Betrachtungen in der Phasenebene, daß auf dem Rande des

- ν -ten instabilen Gebietes mit der Periode $T^* = 2 T_p$ der Zyklus den Nullpunkt der Phasenebene während einer Periode $(2\nu - 1)$ -mal
- μ -ten instabilen Gebietes mit der Periode T_p der Zyklus den Nullpunkt der Phasenebene während einer Periode μ -mal umfährt.

Infolgedessen erscheint in der Eigenbewegung des periodischen Systems mit einem wesentlichen Anteil eine Harmonische mit der Frequenz

$$\Omega = (2\nu - 1) \frac{\pi}{T_p} \quad (6.47)$$

im 1. Fall und

$$\Omega = \mu \frac{2\pi}{T_p} \quad (6.48)$$

im 2. Fall. Zum besseren Verständnis dieses Sachverhalts seien im Bild 6.12 für die ersten 4 instabilen Bereiche der Stabilitätskarte Bild 6.5 die typischen Formen der Zyklen skizziert, die sich auf den Stabilitätsrändern ausbilden.

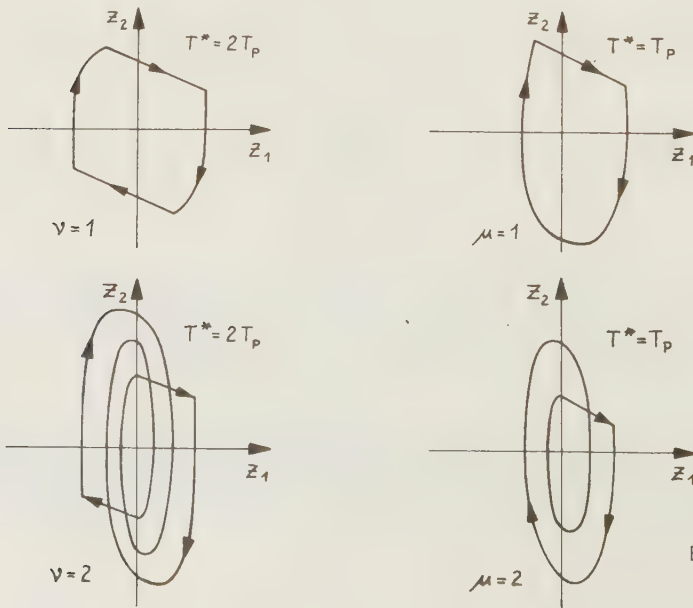


Bild 6.12

7 STABILITÄT DES ERREGTEN NICHTLINEAREN REGELKREISES

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie zur Stabilitätsuntersuchung des erregten nichtlinearen Regelkreises die Stabilitätsaussagen des abgeleiteten periodisch zeitvarianten Systems herangezogen werden können und wie sich mit dessen aufklingenden Eigenschwingungen nichtlineare Phänomene erkennen lassen.

Zunächst wird von den Gleichungen des nichtlinearen Regelkreises, Bild 2.1, ausgegangen. Sie setzen sich im Zeitbereich aus den Zustandsgleichungen des Linearteils

$$\dot{\underline{z}} = \underline{A} \underline{z} + \underline{b} u \quad (7.1a)$$

$$x = \underline{c}^T \underline{z} \quad , \quad (7.1b)$$

der nichtlinearen Funktion

$$u = f(x_w) \quad (7.1c)$$

und der Gleichung der Mischstelle

$$x_w = w - x \quad (7.1d)$$

zusammen, vgl. Kapitel 3. Für eine bestimmte harmonische Erregung $w(t) = w_0 \sin \omega_0 t$ sei $x_w(t)$ eine mit der Periode $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ periodische Lösung dieses Gleichungssystems. Diese Lösung stellt sich nur dann asymptotisch stabil ein, wenn für jede Nachbarlösung $\tilde{x}_w(t)$ gilt, daß die Abweichung

$$d(t) = x_w(t) - \tilde{x}_w(t) \quad (t_0 < t) \quad (7.2)$$

den Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(t) = 0 \quad (7.3)$$

besitzt. Insbesondere gilt das auch für eine Nachbarlösung aus der engsten Umgebung von $x_w(t)$, bei der also

$$\overline{d^2(t)} < \overline{x_w^2(t)} \quad (t_0 < t < +\infty) \quad (7.4)$$

ist. Setzt man eine eng benachbarte Lösung $\tilde{x}_w(t)$ mit der Substitution

$$\tilde{x}_w(t) = x_w(t) - \delta(t) \quad (7.5)$$

in das Gleichungssystem (7.1) ein und verwendet die Tangentennäherung

$$f(x_w - \delta) \approx f(x_w) - f'(x_w)\delta, \quad (7.6)$$

so folgt, daß $\delta(t)$ durch das Gleichungssystem

$$\dot{\underline{q}} = [\underline{A} - f'(x_w) \underline{b} \underline{c}^T] \underline{q} \quad (7.7a)$$

$$\delta = \underline{c}^T \underline{q} \quad (7.7b)$$

beschrieben wird. Es hat wegen $x_w = x_w(t) = x_w(t+T)$ periodisch zeitabhängige Koeffizienten. Damit sich für die Nachbarlösung $\tilde{x}(t)$ der Grenzwert (7.3) einstellt, muß das System eine asymptotisch stabile Ruhelage besitzen /21/. Ist das nicht der Fall, kann sich $x_w(t)$ nicht asymptotisch stabil im nichtlinearen Regelkreis einstellen.

Bei den obigen Ausführungen wurde angenommen, daß sich die periodische Lösung $x_w(t)$ bei harmonischer Fremderregung einstellt. Es kann sich aber auch eine periodische Lösung durch Selbsterregung, d.h. eine Grenzschwingung, ergeben. Zur Klärung der Frage, ob sich die Grenzschwingung stabil einstellt, ließe sich als Kriterium ebenfalls die Stabilität von (7.7) verwenden. Hat man jedoch mit dem Zweiortskurvenverfahren Amplitude und Frequenz der selbsterregten Schwingung ermittelt, vgl. Kapitel 2, so prüft man zweckmäßigerweise auch ihre Stabilität an Hand der Ortskurven auf der Grundlage des NYQUIST-Kriteriums. Allerdings kann damit nur die Stabilität bezüglich der Grundschwingung festgestellt werden.

Ersetzt man das Argument $x_w(t)$ der parameterverändernden Funktion $f'(x_w(t))$ durch die Lösung $\tilde{x}_w(t)$ des harmonisch linearisierten Regelkreises, dann ergibt sich das für $\hat{\varepsilon}_2$ abgeleitete homogene Gleichungssystem, vgl. Gl. (3.23). Aus der Instabilität von (7.7) mit $\tilde{x}_w$ anstelle von x_w folgt, daß sich die harmonische Lösung $\tilde{x}_w(t)$ nicht stabil im nichtlinearen Regelkreis ausbilden kann. Weicht $x_w(t)$ nicht wesentlich von $\tilde{x}_w(t)$ ab, was bei einem geringen Oberwellenanteil der Fall ist, wird man annehmen dürfen, daß sich die Stabilitätsgebiete des Systems

(7.7) mit den beiden parameterverändernden Funktionen weitgehend decken.

Über die reine Feststellung einer Instabilität des nichtlinearen Regelkreises hinaus läßt sich noch ermitteln, welches nichtlineare Phänomen dabei ausgelöst wird. Dazu ist die Kenntnis der Eigenwerte der Transitionsmatrix bezüglich einer Periode des periodischen Systems erforderlich. Für ihre Bestimmung ist im Rahmen dieser Arbeit ein Digitalprogramm erstellt worden /22/. Aus den instabilen Eigenwerten kann dann abgeleitet werden, mit welchen Schwingungen das periodisch zeitvariante System und damit auch der nichtlineare Regelkreis aufklingen.

7.1 Feststellung nichtlinearer Phänomene

Betrachtet werden fremderregte Regelkreise, die eine der in der Tabelle, Bild 4.4, aufgelisteten Nichtlinearitäten besitzen können und deren Linearteile eine Verzögerung 2. Ordnung haben. Dafür läßt sich dann ein periodisches System 2. Ordnung mit stückweise konstanten Parametern ableiten, dessen Stabilitätsbereiche in Abhängigkeit des Tastverhältnisses und der Periode oder den Amplituden der parameterverändernden Funktion für einige relevante Fälle auf den Stabilitätskarten dargestellt sind. Im vorangegangenen Kapitel ist gezeigt worden, wie sich die Periode und die wesentliche Harmonische der periodischen Komponente einer aufklingenden Schwingung ermitteln läßt. In dem Fall, daß sich nur der Koeffizient a_0 zeitlich ändert, konnte für die Karten Bild 6.4 und 6.5 bei den instabilen Bereichen die Periode und die wesentliche Harmonische der periodischen Komponente angegeben werden. Diese Angaben lassen sich direkt zur Feststellung nichtlinearer Phänomene des Regelkreises auswerten, was in den folgenden Kapiteln gezeigt wird.

In dieser Weise wurde bisher die nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y^3 = x_0 \sin \omega t$$

behandelt. Als abgeleitete Differentialgleichung mit zeitabhängigen Koeffizienten ergibt sich hier die MATHIEUSche Differentialgleichung, deren Stabilitätsbereiche, wie bereits erwähnt, auf der INCE-STRUTTSchen Karte angegeben sind. Bei dem ersten instabilen Bereich wurde auf "Sprung-

phänomene" geschlossen /23/. Als einziger betrachtete HAYASHI /24/ auch die weiteren instabilen Bereiche und leitete daraus das sprunghafte Auftreten von höheren Harmonischen ab.

7.1.1 Sprungphänomen

Die aufklingenden Schwingungen in dem ersten instabilen Bereich der Stabilitätskarten Bild 6.4 und 6.5 - gezählt wird in Richtung zunehmender Tastverhältnisse - enthalten gemäß (6.47) in den periodischen Komponenten eine wesentliche Harmonische mit der Frequenz

$$f = \frac{1}{2T_p} \quad . \quad (7.8)$$

Diese Frequenz ist identisch mit der Frequenz f_0 der Erregung am Eingang des Regelkreises, da

$$T_p = \frac{T}{2} \quad \text{mit} \quad T = \frac{1}{f_0}$$

ist, vgl. Kapitel 3. Die aufklingende Schwingung überlagert sich der Lösung $x_w(t)$ des nichtlinearen Regelkreises, so daß bei ihm eine Instabilität bezüglich der Grundschiwingung vorliegt. Die Folge ist eine - von den instabilen Eigenwerten bestimmte - plötzliche Änderung der Signale des Regelkreises in Amplitude und Phase, die als "Sprungphänomen" bezeichnet wird.

Die Ermittlung von Sprungphänomenen wird im allgemeinen an Hand des Amplitudenfrequenzganges oder der Amplitudenkennlinie des harmonisch linearisierten Regelkreises vorgenommen. Sie treten auf, wenn der Amplitudenfrequenzgang eine nach rechts oder links geneigte Resonanzüberhöhung besitzt, jenachdem ob die Kennlinie der Nichtlinearität eine zu- oder abnehmende Steigung besitzt, und wenn die Amplitudenkennlinie einen S-förmigen Verlauf hat. Für das Beispiel eines Regelkreises mit einem Begrenzer und einem verzögert integrierenden Linearteil, Bild 7.1a, ist so ein Amplitudenfrequenzgang, Bild 7.1b, und die entsprechende Amplitudenkennlinie, Bild 7.1c, einmal dargestellt. Als Ausgangssignal ist, wie in der Literatur üblich, die Regelabweichung betrachtet worden, weil sich die Kennlinien dann mit weniger Rechenaufwand ergeben.

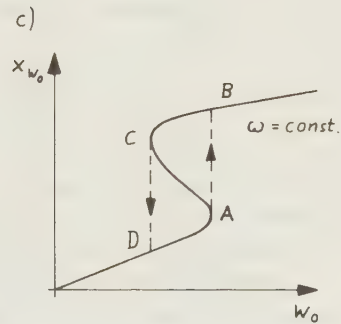
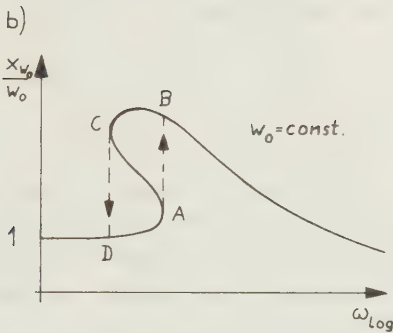
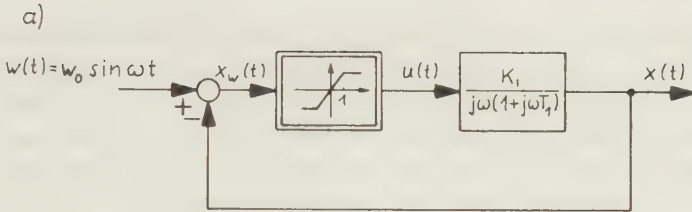


Bild 7.1

Mit Hilfe dieser Kennlinien läßt sich das Sprungphänomen folgendermaßen erklären. Wird durch quasistationäre Erhöhung bzw. Verminderung der Amplitude w_0 oder Kreisfrequenz ω_0 des Führungssignals $w(t)$ der Punkt A bzw. C auf der Frequenz- oder Amplitudenkennlinie erreicht, so geht bei weiterer Erhöhung bzw. Verminderung die Amplitude x_{w_0} plötzlich in den darüber liegenden Punkt B bzw. darunter liegenden Punkt D über, da der Kennlinienteil zwischen A und C nicht stabil eingenommen werden kann / 4/.

Für den dargestellten Regelkreis soll einmal der in Abhängigkeit von der Amplitude sich ergebende instabile Bereich aus der Amplitudenkennlinie einerseits und aus der Stabilitätskarte des abgeleiteten periodischen Systems andererseits ermittelt werden, um sie miteinander zu vergleichen. Mit $f_0 = 0,7 \text{ Hz}$ und $T_1 = 1 \text{ sec}$ werden dabei mehrere K_1 -

Werte und damit mehrere Amplitudenkennlinien zum Vergleich herangezogen. Für $K_I = 22 \text{ sec}^{-1}$ biegt die Amplitudenkennlinie gerade noch nicht nach links ab, Bild 7.2. Bei $K_I = 25 \text{ sec}^{-1}$ ergibt sich bereits deutlich ein Kennlinienteil mit negativer Steigung, d.h. ein instabiler Kennlinienteil. Mit weiter zunehmenden Integrationsbeiwerten werden auch die instabilen Abschnitte größer. Auf der entsprechenden Stabilitätskarte Bild 6.4 ist das Stabilitätsverhalten für Werte von $a_0^{(1)} = K_I/T_1$ aus dem Intervall $[1 \text{ sec}^{-2}, 100 \text{ sec}^{-2}]$ in Abhängigkeit des Tastverhältnisses $\gamma = \tau_1/T_p$ angegeben. Es kann über die Beziehung

$$\frac{x_{w0}}{d} = \frac{1}{\sin \frac{\pi \tau_1}{2 T_p}} \quad (7.9)$$

leicht in den zugehörigen, auf d bezogenen Amplitudenwert x_{w0}/d umgerechnet werden. Überträgt man nun mit dieser Beziehung aus $a_0^{(1)}$ der Stabilitätskarte den ersten instabilen Bereich bei den entsprechenden Integrationsbeiwerten ins Amplitudenkennlinienfeld, Bild 7.2, so ergeben sich die zwischen den kreisförmigen Markierungen liegenden Abschnitte. Während die unteren Markierungen ziemlich genau dort liegen, wo die Kennlinien in eine negative Steigung übergehen, erscheinen dagegen die oberen Markierungen bei größeren K_I -Werten kurz nachdem sich wieder eine positive Steigung eingestellt hat. Da dem Kriterium, das aus dem negativ geneigten Kennlinienteil Instabilität folgert, zugrunde liegt, daß die betrachtete Nachbarlösung sich nur in Amplitude und Phase von der Grundschwingung unterscheidet /24/, was bei dem Kriterium, das auf dem Stabilitätsverhalten des abgeleiteten periodischen Systems beruht, nicht vorausgesetzt werden muß, wird der instabile Bereich genauer durch das zuletzt genannte Kriterium erfaßt.

Zu den beiden gestrichelten Geraden im Kennlinienfeld, Bild 7.2, ist folgendes festzustellen. Die horizontale Gerade kennzeichnet die obere Grenze bis zu welcher sich der Regelkreis linear verhält, da unterhalb $\frac{x_{w0}}{d} < 1$ ist. Die geneigte Gerade stellt die steilste Sekante dar, die von den Kennlinien erreicht werden kann. Sie gehorcht der Gleichung

$$\frac{x_{w0}}{d} = \frac{\omega_0}{\alpha} \sqrt{1 + \omega_0^2}, \quad (7.10)$$

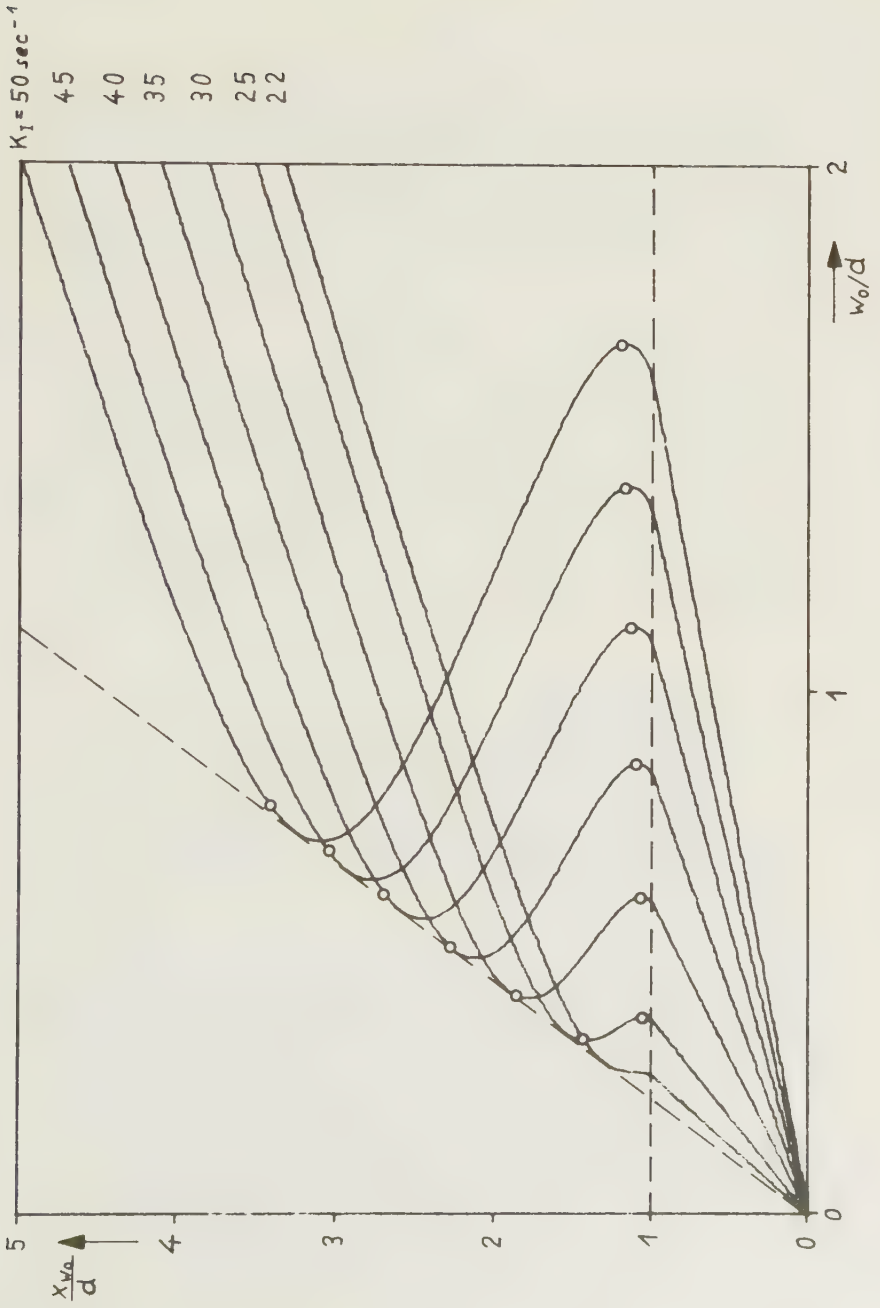


Bild 7.2

wobei ω_0 die Kreisfrequenz des Eingangssignals $w(t)$ ist. Die Sekante an einen beliebigen Punkt einer Kennlinie wird beschrieben durch

$$\frac{x_{w0}}{d} = |F_{x_w}(j\omega_0, N)| \frac{w_0}{d} \quad (7.11a)$$

mit
$$F_{x_w}(j\omega, N) = \frac{1}{1 + NF(j\omega)} \quad (7.11b)$$

Sie ist am steilsten, wenn

$$|F_{x_w}(j\omega_0, N)| = \sqrt{\frac{\omega_0^2 + \omega_0^4}{\omega_0^2 + (NK_I - \omega_0^2)^2}} \quad (7.12)$$

maximal bei

$$N(x_{w0}) K_I = \omega_0^2$$

wird. Für den Fall, daß

$$K_I > \omega_0^2$$

ist, erreicht die Sekante an die Amplitudenkennlinie genau einmal diese Steilheit wegen $1 \geq N(x_{w0}) > 0$. Bei

$$K_I = \omega_0^2$$

besitzt die Kennlinie bis $\frac{x_{w0}}{d} = 1$ diese steilste Sekante, während für

$$K_I < \omega_0^2$$

die Sekanten stets flacher geneigt sind.

7.1.2 Sprunghaftes Auftreten der 2. Harmonischen

Bei dem zweiten instabilen Bereich in den Stabilitätskarten, Bild 6.4 und 6.5, enthalten die aufklingenden Schwingungen in den periodischen Komponenten eine wesentliche Harmonische mit der Frequenz

$$f = \frac{1}{T_p} \quad , \quad (7.13)$$

die also doppelt so groß ist wie die Frequenz f_0 des Führungssignals. Folglich ergibt sich eine aufklingende 2. Harmonische im nichtlinearen Regelkreis. Die 2. Harmonische verändert dabei das sie erzeugende Signal $x_w(t)$, was zu ihrer stabilen Einstellung führt.

Zur Bestätigung dieses Phänomens wurde am Analogrechner ein Regelkreis gesteckt, dessen Linearteil sich wieder aus einem Integrierer mit einer Verzögerung 1. Ordnung zusammensetzte, während als Nichtlinearität diesmal eine "Tote Zone" gewählt wurde, Bild 7.3.

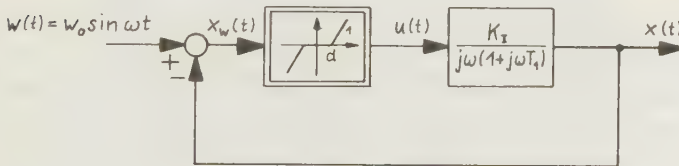


Bild 7.3

Mit dem Integrationsbeiwert $K_I = 100 \text{ sec}^{-1}$ und der Zeitkonstanten $T_1 = 1 \text{ sec}$ wurde der Regelkreis sinusförmig bei einer Frequenz von $f_0 = 0,7 \text{ Hz}$ erregt, wobei die Amplitude w_0 so weit erhöht wurde, bis die 2. Harmonische sprunghaft auftrat. Dabei lag eine Aussteuerung von

$$\frac{x_{w0}}{d} \approx 2,2$$

vor, wofür sich über die Beziehung

$$\frac{T_1}{T_p} = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{d}{x_{w0}} \quad , \quad (7.14)$$

vgl. Tabelle Bild 4.4, ein Tastverhältnis von

$$\frac{\tau_1}{T_p} \approx 0,7$$

ergab. Ein Vergleich mit der zugehörigen Stabilitätskarte, Bild 6.4, zeigt, daß der Regelkreis mit diesem Wert erwartungsgemäß im zweiten instabilen Bereich liegt. Genau genommen müßte der Wert am Stabilitätsrand auftreten, während er sich hier ein Stück davon entfernt innerhalb des instabilen Bereiches befindet. Bedenkt man aber, daß die Stabilitätsermittlung mit der harmonischen Näherung $\hat{x}_w(t)$ und nicht mit dem tatsächlichen Signal $x_w(t)$ vorgenommen worden ist, so darf auch hier nur eine genäherte Übereinstimmung erwartet werden.

Die Schreiberaufzeichnung der Regelabweichung $x_w(t)$, Bild 7.4a, und noch deutlicher die der Abweichung $\varepsilon(t) = x_w(t) - \hat{x}_w(t)$, Bild 7.4b, belegt die Ausbildung der 2. Harmonischen.

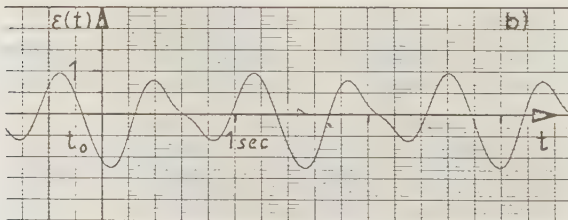
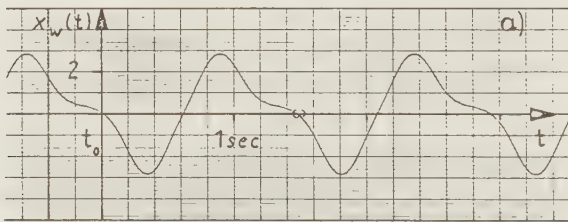


Bild 7.4

Die Abweichung $\varepsilon(t)$ enthält auch die 1. Harmonische, was verständlich ist, da durch die 2. Harmonische das Übertragungsverhalten der Nichtlinearität bezüglich der Grundschiwingung verändert wird. Ferner trat bei $x_w(t)$ ein Mittelwert von $\mu \approx 0,1V$ auf, der wegen des kleinen Betrages allerdings kaum bei den Meßschrieben zu erkennen ist. Auf diesen Effekt wird später noch eingegangen.

Das Auftreten einer 2. Harmonischen steht scheinbar im Widerspruch dazu, daß Nichtlinearitäten mit nullpunktsymmetrischen Kennlinien nur ungeradzahlige Oberwellen erzeugen können, wenn sie symmetrisch angesteuert werden. Dieser Widerspruch besteht aber nur so lange, wie man die Oberwellen ausschließlich durch Verzerrung entstanden denkt. Zur Klärung muß jedoch noch eine weitere Eigenschaft von Nichtlinearitäten berücksichtigt werden. Sie besteht darin, daß bei Übertragung einer Summe aus zwei Sinusschwingungen jeder Schwingung im allgemeinen eine Phasenänderung aufgeprägt wird, sofern die Frequenz der einen ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist und die Schwingungen zueinander phasenverschoben sind.

Tritt nun der Fall ein, daß eine 2. oder höhere Harmonische im Regelkreis aufklingt, so kann sie bei der Übertragung durch die Nichtlinearität, die dabei gemeinsam mit der Grundschiwingung erfolgt, gerade eine solche Phasendrehung aufgeprägt bekommen, die zusammen mit der Phasendrehung des Linearteils 180° ergibt. Damit wäre die Phasenbedingung für einen Grenzyklus erfüllt. Wird außerdem durch entsprechende Aussteuerung der Nichtlinearität die Betragsbedingung erfüllt, so stellt sich ein Grenzyklus mit der 2. oder höheren Harmonischen ein.

Die Berechnung der Amplitude des sich in dem vorliegenden Beispiel offensichtlich stabil eingestellten Grenzyklusses mit der 2. Harmonischen kann unter Verwendung der von C. WEST / 25 / eingeführten "Dual-Input-Describingfunction" ermittelt werden. Vielfach wird heute in der angelsächsischen Literatur ausführlicher von der "Two-Sinusoidal-Input-Describing-Function", kurz "TSIDF", gesprochen. Mit ihr wird die Übertragung einer Summe aus zwei Sinusschwingungen durch die Nichtline-

arität von zwei Verstärkungsfaktoren, die im allgemeinen aussteuerungsabhängig und komplex sind, erfaßt.

Ist das Eingangssignal $x_w(t)$ gegeben mit

$$x_w(t) = x_{w_{oA}} \sin \omega_0 t + x_{w_{oB}} \sin (\nu \omega_0 t + \psi) \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots),$$

dann wird das Ausgangssignal

$$u(t) = f[x_w(t)]$$

approximiert durch die ersten Glieder einer zweidimensionalen FOURIER-Reihenentwicklung

$$u(t) \approx a_{11} \sin \omega_0 t + b_{11} \cos \omega_0 t + a_{21} \sin (\nu \omega_0 t + \psi) + b_{21} \cos (\nu \omega_0 t + \psi) \quad (7.15a)$$

mit

$$a_{11} = \frac{2}{T} \int_0^T f[x_{w_{oA}} \sin \omega_0 t + x_{w_{oB}} \sin (\nu \omega_0 t + \psi)] \sin \omega_0 t \, dt \quad (T = \frac{2\pi}{\omega_0}) \quad (7.15b)$$

$$b_{11} = \frac{2}{T} \int_0^T f[x_{w_{oA}} \sin \omega_0 t + x_{w_{oB}} \sin (\nu \omega_0 t + \psi)] \cos \omega_0 t \, dt \quad (7.15c)$$

$$a_{21} = \frac{2}{T} \int_0^T f[x_{w_{oA}} \sin \omega_0 t + x_{w_{oB}} \sin (\nu \omega_0 t + \psi)] \sin (\nu \omega_0 t + \psi) \, dt \quad (7.15d)$$

$$b_{21} = \frac{2}{T} \int_0^T f[x_{w_{oA}} \sin \omega_0 t + x_{w_{oB}} \sin (\nu \omega_0 t + \psi)] \cos (\nu \omega_0 t + \psi) \, dt \quad (7.15e)$$

wobei die komplexen Funktionen

$$N_A(x_{w_{oA}}, x_{w_{oB}}, \psi, \nu) = \frac{a_{11}}{x_{w_{oA}}} + j \frac{b_{11}}{x_{w_{oA}}} \quad (7.15f)$$

$$\text{und } N_B(x_{w_{oA}}, x_{w_{oB}}, \psi, \nu) = \frac{a_{21}}{x_{w_{oB}}} + j \frac{b_{21}}{x_{w_{oB}}}$$

die Dual-Input-Describingfunction darstellen. Mit der komplexen Erweiterung des Eingangssignals

$$\tilde{x}_w(t) = x_{w_{oA}} e^{j\omega_0 t} + x_{w_{oB}} e^{j(\nu\omega_0 t + \psi)}$$

ergibt sich dann das komplexe Ausgangssignal zu

$$\tilde{u}(t) \approx N_A(x_{w_{oA}}, x_{w_{oB}}, \psi, \nu) x_{w_{oA}} e^{j\omega_0 t} + N_B(x_{w_{oA}}, x_{w_{oB}}, \psi, \nu) x_{w_{oB}} e^{j(\nu\omega_0 t + \psi)} \quad (7.16)$$

Da die komplexen Verstärkungen N_A und N_B nicht nur von den Parametern der sie betreffenden Schwingung, sondern auch von den Parametern der anderen Schwingung abhängen, sie also miteinander verkoppelt sind, muß bei der Ermittlung einer Lösung im Regelkreis die Übertragungsgleichung der Grundschiwingung

$$x_{w_{oA}} = \left| \frac{1}{1 + N_A(x_{w_{oA}}, x_{w_{oB}}, \psi, \nu) F(j\omega_0)} \right| w_0 \quad (7.17a)$$

zusammen mit der Bedingungsgleichung für den Grenzzyklus bezüglich der ν -ten Harmonischen

$$1 + N_B(x_{w_{oA}}, x_{w_{oB}}, \psi, \nu) F(j\nu\omega_0) = 0 \quad (7.17b)$$

gelöst werden.

Die zur Bestimmung der drei Unbekannten $x_{w_{oA}}$, $x_{w_{oB}}$ und ψ erforderliche dritte Gleichung erhält man durch Aufspaltung von (7.17b) in eine Real- und Imaginärteilegleichung oder in eine Betrags- und Phasengleichung.

Enthält die Regelabweichung $x_w(t)$ eine geradzahlige Harmonische, die dann wegen des frequenzabhängigen Linearteils zur Grundschiwingung phasenverschoben ist, so besitzt $x_w(t)$ weder die Symmetrie

$$x_w(t + \frac{T}{2}) = -x_w(t)$$

noch hat $x_w(t)$ einen ungeraden Verlauf. Die Folge davon ist, daß die Nichtlinearität an ihrem Ausgang im allgemeinen einen Mittelwert er-

zeugt. Dieser Mittelwert wird durch den Regelkreis auf den Eingang der Nichtlinearität übertragen, weswegen die TSIDF mit Mittelwert angesetzt werden muß. Dadurch entsteht eine weitere Unbekannte, für die das Gleichungssystem (7.17) um eine 4. Gleichung, nämlich die Übertragungsgleichung des Regelkreises bezüglich eines Mittelwertes zu erweitern ist.

Bei dem behandelten Regelkreis, Bild 7.3, ist die Bedingung für den Mittelwert einfach anzugeben: Hinter der Nichtlinearität muß der Mittelwert identisch verschwinden, da sich wegen des integrierenden Linearanteils sonst keine stationäre Schwingung einstellen kann. Damit muß der Integrierer an seinem Ausgang einen Mittelwert μ einstellen, der gerade so groß ist, daß der von der Ansprechempfindlichkeit erzeugte Mittelwert zu Null kompensiert wird. Das vollständige Gleichungssystem zur Ermittlung der Grundschwingung, der 2. Harmonischen und des Mittelwertes für den Regelkreis, Bild 7.3, lautet demnach:

$$x_{w_{oA}} = \left| \frac{1}{1 + N_A(x_{w_{oA}}, x_{w_{oB}}, \mu, \psi, 2) F(j\omega_0)} \right| w_0 \quad (7.18a)$$

$$|N_B(x_{w_{oA}}, x_{w_{oB}}, \mu, \psi, 2) F(j2\omega_0)| = 1 \quad (7.18b)$$

$$\arccos [N_B(x_{w_{oA}}, x_{w_{oB}}, \mu, \psi, 2) F(j2\omega_0)] = 180^\circ \quad (7.18c)$$

$$N_\mu(x_{w_{oA}}, x_{w_{oB}}, \mu, \psi, 2) = 0 \quad (7.18d)$$

mit

$$N_\mu = \frac{1}{\mu} \frac{1}{T} \int_0^T f[\mu + x_{w_{oA}} \sin \omega_0 t + x_{w_{oB}} \sin (2\omega_0 t + \psi)] dt \quad (7.18e)$$

Die komplexen Verstärkungen N_A und N_B hierin ergeben sich aus den Bestimmungsgleichungen (7.15) nach einer additiven Erweiterung des Argumentes der nichtlinearen Funktion $f(\cdot)$ um μ .

Von der Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (7.18), die nur numerisch mit größerem Aufwand erzielt werden kann, wird hier abgesehen. Mit der Darstellung sollte lediglich gezeigt werden, wie sich eine im Regelkreis auftretende geradzahlige Oberwelle prinzipiell berechnen läßt. Darüber hinaus macht die Abhandlung deutlich, welchen Wert der aus der Stabilitätsuntersuchung gewonnene Hinweis einer aufklingenden bestimmten Harmonischen für diese Methode besitzt. Betrachtet man dazu die Definitionsgleichungen (7.15) der TSIDF, so erkennt man, daß für ihre Berechnung bereits bekannt sein muß, welche Harmonische zu berücksichtigen ist. Folglich wäre die Methode mit der TSIDF ohne den Hinweis aus der Stabilitätsuntersuchung ein reines Probiervorgehen.

7.1.3 Weitere sprunghafte Signaländerungen

Während auf der Stabilitätskarte, Bild 6.4, für die dargestellten $a_0^{(1)}$ -Werte nach den beiden instabilen Bereichen kein weiterer folgt, weist dagegen die Stabilitätskarte, Bild 6.5, noch einige instabile Bereiche aus. In Verallgemeinerung zu den behandelten Fällen in den vorangegangenen Kapiteln kann festgestellt werden, daß bei dem ν -ten instabilen Bereich die aufklingenden Schwingungen in ihren periodischen Komponenten eine wesentliche Harmonische mit dem ν -fachen der Frequenz f_0 des Führungssignals enthalten. Daher ergibt sich bei einem nichtlinearen Regelkreis, dessen abgeleitetes periodisches System mit seinem Wertepaar $(a_0^{(1)}, \gamma)$ im ν -ten instabilen Bereich liegt, eine aufklingende ν -te Harmonische.

Die ungeradzahligen Harmonischen sind bereits aufgrund der Verzerrung der nullpunktsymmetrischen Nichtlinearität im Regelkreis vorhanden. Daher führt eine Instabilität mit einer ungeradzahligen Harmonischen zu einer sprunghaften Änderung ihrer Amplitude und Phase im Regelkreis, was gleichzeitig eine Änderung der Grundschwingung und anderer Oberwellen nach sich zieht. Dieses Verhalten ist analog zu dem bei Instabilität der Grundschwingung, d.h. dem Sprungphänomen. Die erregende Schwingung wird dabei durch den Verzerrungsanteil der Nichtlinearität eingebracht. Dieses Phänomen kann mit der einfachen Beschreibungsfunktion natürlich nicht erkannt werden, da bei ihr Oberwellen unberück-

sichtigt bleiben. Dazu wäre wiederum die TSIDF für das aus Grundschiwingung und entsprechender Oberwelle bestehende Eingangssignal erforderlich.

7.1.4 Subharmonische

Ein weiteres Phänomen harmonisch erregter nichtlinearer Regelkreise stellt das Auftreten von "Subharmonischen" dar. Das sind Harmonische, deren Frequenzen f_s sich als ganzzahlige Teile der Frequenz f_0 der erregenden Schwingung ergeben:

$$f_s = \frac{f_0}{\nu} \quad (\nu = 2, 3, 4, \dots) \quad (7.19)$$

Dieses Phänomen macht sich allerdings nicht als Instabilität des abgeleiteten periodischen Systems bemerkbar; denn obwohl bei nichtlinearen Systemen 2. Ordnung Subharmonische auftreten können, haben die periodischen Komponenten der aufklingenden Schwingungen des abgeleiteten periodischen Systems höchstens die Periode

$$T_{\max} = 2 T_P,$$

die wegen

$$T_P = \frac{T}{2} \quad (T = \frac{1}{f_0})$$

gleich der Periode der erregenden Schwingung ist:

$$T_{\max} = T.$$

Subharmonische entstehen erst durch eine größere Auslenkung des Systems von der periodischen Lösung /26/, wofür die Tangentennäherung nicht mehr ausreicht.

Subharmonische treten im allgemeinen mit großer, oft sogar mit größerer Amplitude als die der Grundschiwingung auf, so daß dann die einfache Beschreibungsfunktion zur Kennzeichnung des Übertragungsverhaltens des nichtlinearen Systems nicht mehr ausreicht und die TSIDF verwendet werden muß. Unter welchen Bedingungen sie sich nicht ausbilden, ist für einige wichtige Nichtlinearitäten ermittelt und in /27/ ausführlich dargestellt worden.

8 ABSCHÄTZUNG DES FEHLERS DER HARMONISCHEN LINEARISIERUNG IM REGELKREIS

8.1 Definition

Der Fehler der harmonischen Linearisierung wird als Verhältnis des Effektivwertes der Abweichung ε zum Effektivwert des betrachteten Signals beim nichtlinearen Regelkreis definiert. Da die Abweichungen am Ausgang des Regelkreises und hinter der Mischstelle bis aufs Vorzeichen miteinander übereinstimmen, vgl. Kapitel 3, ist demnach

$$\Delta_x = \sqrt{\frac{\overline{\varepsilon^2(t)}}{\overline{x^2(t)}}} \quad (8.1a)$$

der Fehler bezüglich der Regelgröße x und

$$\Delta_{x_w} = \sqrt{\frac{\overline{\varepsilon^2(t)}}{\overline{x_w^2(t)}}} \quad (8.1b)$$

der Fehler bezüglich der Regelabweichung x_w . Dabei bedeutet die Oberstreichung der quadrierten Signale wieder deren zeitliche Mittelung. Für den Fall, daß sich die Abweichung ε nur aus den Oberwellen von x bzw. x_w zusammensetzt, ist der Fehler dann identisch mit dem Klirrfaktor, der ein bekanntes Maß für den Verzerrungsgrad darstellt. Berechenbar sind nur Näherungen $\hat{\varepsilon}$ der Abweichung ε und die Signale $\hat{x}$ und $\hat{x}_w$ des harmonisch linearisierten Regelkreises, so daß die Fehler durch

$$\hat{\Delta}_x = \sqrt{\frac{\overline{\hat{\varepsilon}^2(t)}}{\overline{\hat{x}^2(t)}}} \quad \text{bzw.} \quad \hat{\Delta}_{x_w} = \sqrt{\frac{\overline{\hat{\varepsilon}^2(t)}}{\overline{\hat{x}_w^2(t)}}} \quad (8.2a,b)$$

näherungsweise ermittelt werden. Eine Unterscheidung zwischen den Fehlern von Regelgröße und Regelabweichung ist natürlich nur bei dem fremd-erregten Regelkreis erforderlich; denn bei Selbsterregung stimmen Regelgröße und Regelabweichung bis aufs Vorzeichen miteinander überein.

8.2 Erste Abschätzung des Fehlers

Die erste Abschätzung der Fehler ergibt sich, wenn für die Abweichung ε deren 1. Näherung $\hat{\varepsilon}_1$ eingesetzt wird:

$$\hat{\Delta}_x^{(1)} = \sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}_1^2(t)}{\hat{x}^2(t)}} \quad \text{bzw.} \quad \hat{\Delta}_{x_w}^{(1)} = \sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}_1^2(t)}{\hat{x}_w^2(t)}} \quad (8.3a,b)$$

Ausgehend von der komplexen Reihendarstellung (3.18) für $\hat{\varepsilon}_1$ läßt sich folgende reelle Reihe angeben:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_1(t) = \sum_{\substack{v=3 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \left\{ \left[a_v \cdot \operatorname{Re}\{F(jv\omega_0)\} + b_v \cdot \operatorname{Im}\{F(jv\omega_0)\} \right] \cos v\omega_0 t \right. \\ \left. - \left[a_v \cdot \operatorname{Im}\{F(jv\omega_0)\} - b_v \cdot \operatorname{Re}\{F(jv\omega_0)\} \right] \sin v\omega_0 t \right\} \end{aligned} \quad (8.4)$$

mit $a_v = 2 \operatorname{Re}\{B_v\}$ und $b_v = 2 \operatorname{Im}\{B_v\}$. Darin bedeutet $\operatorname{Re}\{\cdot\}$ bzw. $\operatorname{Im}\{\cdot\}$ die Bildung des Real- bzw. Imaginärteiles der in der Klammer stehenden komplexen Funktion. An Hand der Darstellung (8.4) wird der quadratische Mittelwert von $\hat{\varepsilon}_1(t)$ gebildet. Ferner gilt für den quadratischen Mittelwert der harmonisch genäherten Regelgröße $\hat{x}(t)$ die Beziehung

$$\overline{\hat{x}^2(t)} = \frac{x_0^2}{2} \quad (8.5)$$

Damit ergibt sich die 1. Abschätzung des Fehlers bezüglich der Regelgröße zu:

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_x^{(1)} = \left\{ \sum_{\substack{v=3 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \left[\left[\frac{a_v}{x_0} \operatorname{Re}\{F(jv\omega_0)\} + \frac{b_v}{x_0} \operatorname{Im}\{F(jv\omega_0)\} \right]^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \left[\frac{a_v}{x_0} \operatorname{Im}\{F(jv\omega_0)\} - \frac{b_v}{x_0} \operatorname{Re}\{F(jv\omega_0)\} \right]^2 \right] \right\}^{1/2} \quad (8.6) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck kann durch Ausquadrieren und entsprechendes Zusammenfassen der einzelnen Terme auf die kurze Form

$$\hat{\Delta}_x^{(1)} = \frac{2}{x_0} \sqrt{\sum_{\substack{v=3 \\ \text{ung.}}}^{\infty} |\beta_v F(jv\omega_0)|^2} \quad (8.7)$$

gebracht werden. In analoger Weise läßt sich der Fehler bezüglich der Regelabweichung $x_w(t)$ bestimmen, was zu dem Ergebnis

$$\hat{\Delta}_{x_w}^{(1)} = \frac{2}{x_{w_0}} \sqrt{\sum_{\substack{v=3 \\ \text{ung.}}}^{\infty} |\beta_v F(jv\omega_0)|^2} \quad (8.8)$$

führt. Da die Koeffizienten β_v von x_{w_0} abhängen, wird mit x_0 in (8.7) eine weitere Größe des linearisierten Regelkreises benötigt. Sie kann durch die Beziehung

$$x_0 = |N(x_{w_0}) F(j\omega_0)| x_{w_0} \quad (8.9)$$

ersetzt werden. Damit folgt gleichzeitig ein allgemeiner Zusammenhang zwischen den genäherten Fehlern $\hat{\Delta}_x$ und $\hat{\Delta}_{x_w}$:

$$\hat{\Delta}_{x_w} = |N(x_{w_0}) F(j\omega_0)| \hat{\Delta}_x. \quad (8.10)$$

Beim fremderregten Regelkreis ergibt sich also der Linearisierungsfehler am Eingang der Nichtlinearität durch Multiplikation des Linearisierungsfehlers am Ausgang des Regelkreises mit dem Amplitudenfrequenzgang des linearisierten Vorwärtzweiges bezüglich der Grundschwingung. Bei führungsoptimierten Regelkreisen ist im allgemeinen

$$|N(x_{w_0}) F(j\omega_0)| > 1, \quad (8.11)$$

was zu einem größeren Fehler am Eingang der Nichtlinearität führt.

In der Literatur wird häufig als Maß für die Verzerrung das Verhältnis der Amplitude einer Oberwelle zur Amplitude der Grundschwingung betrachtet. Dieses Verhältnis läßt sich hier ohne weiteres aus den angegebenen

Beziehungen (8.7) oder (8.8), je nachdem ob die Verzerrung der Regelgröße oder der Regelabweichung untersucht wird, ableiten, indem die Koeffizienten β_ν bis auf die betrachtete Oberwelle zu Null gesetzt werden. Der durch die μ -te Harmonische hervorgerufene Verzerrungsgrad $k_x^{(\mu)}$ der Regelgröße ergibt sich aus (8.7) zu

$$k_x^{(\mu)} \approx \left| \frac{\beta_\mu(x_{w_0})}{\beta_1(x_{w_0})} \frac{F(j\mu\omega_0)}{F(j\omega_0)} \right|, \quad (8.12)$$

indem x_0 durch (8.9) substituiert und β_1 durch die Beziehung

$$\beta_1(x_{w_0}) = \frac{1}{2} N(x_{w_0}) x_{w_0} \quad (8.13)$$

eingeführt wird, die aus den Bestimmungsgleichungen (2.8) und (2.11) der Beschreibungsfunktion und (3.17b) der Fourierkoeffizienten von $f[\hat{x}_w(t)]$ folgt. Das Verhältnis $|\beta_\mu/\beta_1|$ ist dabei der Verzerrungsgrad des Ausgangssignals der harmonisch erregten Nichtlinearität bezüglich der μ -ten Harmonischen. Das Ergebnis (8.12) besagt, daß sich der Verzerrungsgrad am Ausgang des Regelkreises durch Multiplikation des Verzerrungsgrades der Nichtlinearität mit dem Verhältnis des Amplitudenfrequenzganges für die betrachtete Oberwelle zu dem Amplitudenfrequenzgang für die Grundschiwingung ergibt. Daraus folgt unmittelbar, daß der Linearteil die bekannte "Tiefpaßforderung"

$$|F(j\mu\omega_0)| \ll |F(j\omega_0)| \quad \text{für } \mu = 3, 5, 7, \dots \quad (8.14)$$

erfüllen muß, damit der Verzerrungsgrad der Regelgröße deutlich kleiner ist als der Verzerrungsgrad des Ausgangssignals der Nichtlinearität. Die Ungleichung wird hier nur für ungeradzahlige Oberwellen betrachtet, da in dieser Arbeit nullpunktsymmetrische Kennlinien der Nichtlinearitäten vorausgesetzt werden.

Mit Berücksichtigung der Tiefpaßforderung kann der Verzerrungsgrad der Regelgröße und bei Selbsterregung wegen $x = -x_w$ auch der Verzerrungsgrad der Regelabweichung klein gehalten werden. Bei Fremderregung hängt der Verzerrungsgrad der Regelabweichung jedoch von anderen Kriterien ab.

Er ergibt sich bezüglich der μ -ten Harmonischen aus (8.8) mit (8.13) zu

$$k_{x_w}^{(\mu)} \approx \left| \frac{\beta_\mu(x_{w_0})}{\beta_1(x_{w_0})} N(x_{w_0}) F(j\mu\omega_0) \right| . \quad (8.15)$$

Der entscheidende Unterschied dieser Abschätzung gegenüber (8.12) besteht darin, daß der Bezug auf $F(j\omega_0)$ fehlt. Dadurch wirkt sich hier der Amplitudenfrequenzgang des Linearteils direkt aus. Das führt z.B. dazu, daß sich bei konstanter Aussteuerung der Nichtlinearität der Verzerrungsgrad von x_w proportional mit der Verstärkung des Linearteils ändert, während der Verzerrungsgrad von x unverändert bleibt. An einem Beispiel soll der Unterschied zwischen den Abschätzungen (8.12) und (8.15) noch deutlicher gemacht werden.

Betrachtet wird bei einem harmonisch erregten Regelkreis der Verzerrungsgrad bezüglich der 3. Harmonischen. Dabei wird als Linearteil ein Tiefpaß 1. Ordnung mit dem Frequenzgang

$$F(j\omega) = \frac{V}{1 + j \frac{\omega}{\omega_e}} \quad (8.16)$$

verwendet. Für eine gewählte feste Aussteuerung x_{w_0} der Nichtlinearität stellt sich ein bestimmter Verzerrungsgrad

$$k_u^{(3)} \approx \left| \frac{\beta_3(x_{w_0})}{\beta_1(x_{w_0})} \right| \quad (8.17)$$

an ihrem Ausgang und ein bestimmter Wert der Beschreibungsfunktion $N(x_w)$ ein. Die auf $k_u^{(3)}$ bezogenen Verzerrungsgrade $k_x^{(3)}/k_u^{(3)}$ und $k_{x_w}^{(3)}/k_u^{(3)}$ sind⁰ in Abhängigkeit von der Frequenz im Bild 8.1 dargestellt, wobei sich deutlich unterschiedliche Verläufe ergeben.

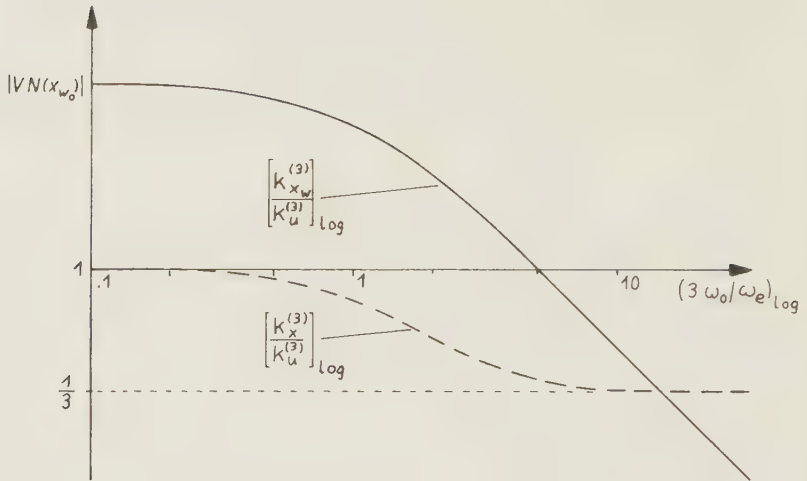


Bild 8.1

Während $k_x^{(3)}/k_u^{(3)}$ bei weit unterhalb der Eckfrequenz liegenden Frequenzen stets den Wert 1 annimmt und zu hohen Frequenzen hin nicht kleiner als $1/3$ wird, beginnt $k_{xw}^{(3)}/k_u^{(3)}$ bei niedrigen Frequenzen mit $VN(x_{w0})$ und fällt bei hohen Frequenzen mit 10 dB/Dekade ab. Wählt man

$$|V/N(x_{w0})| \leq 1,$$

so gilt im gesamten Frequenzbereich

$$k_{xw}^{(3)} \leq k_x^{(3)}.$$

Für

$$|V/N(x_{w0})| > 1$$

wird dagegen die Verzerrung der Regelabweichung erst von einer bestimmten Frequenz ab kleiner als die der Regelgröße.

Die ausführliche Darstellung des sich beim erregten Regelkreis ergebenden Unterschiedes zwischen den Verzerrungsgraden von Regelgröße und Regelabweichung wurde deshalb vorgenommen, weil in der Literatur meist nur die Tiefpaßforderung angeführt wird. Lediglich P. POPOW und J. PALTOW /10/ befassen sich mit der Verzerrung beim fremderregten Regelkreis, indem sie dessen Übertragungsgleichung in die Gleichung der "harmonischen Balance" überführen und dann das Kriterium für Selbsterregung anwenden. Diese Vorgehensweise erfordert die Kenntnis der Amplitude x_{w0} und Phase Ψ der harmonischen Lösung $\bar{x}_w(t) = x_{w0} \sin(\omega_0 t + \Psi)$, was gegenüber der hier angegebenen Beziehung, die nur x_{w0} benötigt, etwa den doppelten Aufwand bedeutet. Das kommt allerdings beim Ergebnis in /10/ nicht zum Ausdruck, weil bei einer Umformung Ψ vergessen worden ist. Aus diesem Grunde ergeben die Ausführungen von P. POPOW und J. PALTOW auch keine richtige Wertung des Verzerrungsgrades der Regelabweichung.

Die hier ohne großen Aufwand abgeleiteten Kriterien für die Verzerrungsgrade basieren natürlich alle auf der 1. Näherung, d.h. auf einer Vernachlässigung der Übertragung von $\mathcal{E}(t)$ durch die Nichtlinearität.

8.3 Zweite Abschätzung des Fehlers

Die zweite Abschätzung der Fehler ergibt sich, wenn die 2. Näherung $\hat{\mathcal{E}}_2$ der Abweichung in (8.2a,b) eingesetzt wird:

$$\hat{\Delta}_x^{(2)} = \sqrt{\frac{\hat{\mathcal{E}}_2^2(t)}{\hat{x}^2(t)}} \quad \text{bzw.} \quad \hat{\Delta}_{x_w}^{(2)} = \sqrt{\frac{\hat{\mathcal{E}}_2^2(t)}{\hat{x}_w^2(t)}} \quad (8.18a,b)$$

Gemäß den Ausführungen des 5. Kapitels kann die Übertragung des periodisch zeitvarianten Systems (3.23), dessen Ausgangssignal $\hat{\mathcal{E}}_2(t)$ bei Erregung mit dem Oberwellenanteil $v(t)$ der Nichtlinearität ist, durch den Frequenzgang $F_p(j\omega, t)$ gekennzeichnet werden, und man erhält

$$\hat{\mathcal{E}}_2(t) = \sum_{\substack{\mu = -\infty \\ \mu \neq \pm 1}}^{+\infty} F_p(j\mu\omega_0, t) \beta_\mu e^{j\mu\omega_0 t} \quad (8.19)$$

Verwendet man ferner die Reihendarstellung (5.2) des Frequenzganges, so ergibt sich

$$\hat{\varepsilon}_2(t) = \sum_{\substack{\mu=-\infty \\ \mu \neq \pm 1}}^{+\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} n_\nu(j\mu\omega_0) \beta_\mu e^{j[\nu\omega_p + \mu\omega_0]t}, \quad (8.20)$$

wobei $\omega_p = 2\pi/T_p$ und T_p die Periodendauer der parameterverändernden Funktion $h(t)$, vgl. (3.25), ist. Wird außerdem die Beziehung

$$\beta_{-\mu} = \beta_\mu^*$$

komplexer FOURIER-Koeffizienten und die ähnlich lautende Eigenschaft

$$n_\nu^*(j\omega) = n_{-\nu}(-j\omega)$$

der Koeffizientenfunktionen von Frequenzgängen periodischer Systeme sowie der hier bestehende Zusammenhang

$$\omega_p = 2\omega_0$$

zwischen den Kreisfrequenzen der Grundschiwingung des Regelkreises und der parameterverändernden Funktion berücksichtigt, dann folgt

$$\hat{\varepsilon}_2(t) = \sum_{\substack{\mu=\pm 3 \\ \text{ung.}}}^{+\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} 2 \operatorname{Re}\{n_\nu(j\mu\omega_0) \beta_\mu e^{j[2\nu+\mu]\omega_0 t}\}. \quad (8.21)$$

Der Laufindex der äußeren Summe nimmt nur ungerade Zahlenwerte an, da wegen der vorausgesetzten Nullpunktsymmetrie der Nichtlinearitäten die FOURIER-Koeffizienten β_μ bei geradzahligem μ verschwinden.

Für die Ermittlung des quadratischen Mittelwertes von $\hat{\varepsilon}_2(t)$ muß $\hat{\varepsilon}_2(t)$ in einer geeigneten Form dargestellt werden. Dazu wird in (8.21) die Realteilbildung ausgeführt, und man erhält mit

$$\operatorname{Re}\{\beta_\mu\} = \frac{a_\mu}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}\{\beta_\mu\} = -\frac{b_\mu}{2}$$

die Beziehung

$$\hat{\varepsilon}_2(t) = \sum_{\substack{\mu=3 \\ \text{ung.}}}^{+\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left\{ [a_\mu \operatorname{Re}\{n_\nu(j\mu\omega_0)\} + b_\mu \operatorname{Im}\{n_\nu(j\mu\omega_0)\}] \cos[(2\nu+\mu)\omega_0 t] \right. \\ \left. - [a_\mu \operatorname{Im}\{n_\nu(j\mu\omega_0)\} - b_\mu \operatorname{Re}\{n_\nu(j\mu\omega_0)\}] \sin[(2\nu+\mu)\omega_0 t] \right\}. \quad (8.22)$$

Um in den Argumenten der trigonometrischen Funktionen nur eine Laufvariable zu haben, wird

$$k = 2\nu + \mu \quad (8.23)$$

eingeführt und ν eliminiert. Die neue Laufvariable k nimmt nur ungerade Zahlenwerte an, da μ ungeradzahlig ist. Damit folgt

$$\hat{\varepsilon}_2(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ \text{ung.}}}^{+\infty} \cos(k\omega_0 t) \sum_{\substack{\mu=3 \\ \text{ung.}}}^{\infty} a_\mu \operatorname{Re}\left\{n_{\frac{k-\mu}{2}}(j\mu\omega_0)\right\} + b_\mu \operatorname{Im}\left\{n_{\frac{k-\mu}{2}}(j\mu\omega_0)\right\} \\ - \sin(k\omega_0 t) \sum_{\substack{\mu=3 \\ \text{ung.}}}^{\infty} a_\mu \operatorname{Im}\left\{n_{\frac{k-\mu}{2}}(j\mu\omega_0)\right\} - b_\mu \operatorname{Re}\left\{n_{\frac{k-\mu}{2}}(j\mu\omega_0)\right\}. \quad (8.24)$$

Wird nun das Quadrat von $\hat{\varepsilon}_2(t)$ an Hand dieser Darstellung gebildet und anschließend die zeitliche Mittelung vorgenommen, so erhält man unter Berücksichtigung der Orthogonalität trigonometrischer Funktionen das Ergebnis

$$\overline{\hat{\varepsilon}_2^2(t)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{ung.}}}^{+\infty} \left\{ \left[\sum_{\substack{\mu=3 \\ \text{ung.}}}^{+\infty} a_\mu \operatorname{Re}\left\{n_{\frac{k-\mu}{2}}(j\mu\omega_0) + n_{\frac{k+\mu}{2}}(j\mu\omega_0)\right\} \right. \right. \\ \left. \left. + b_\mu \operatorname{Im}\left\{n_{\frac{k-\mu}{2}}(j\mu\omega_0) + n_{\frac{k+\mu}{2}}(j\mu\omega_0)\right\} \right]^2 \right. \\ \left. + \left[\sum_{\substack{\mu=3 \\ \text{ung.}}}^{+\infty} a_\mu \operatorname{Im}\left\{n_{\frac{k-\mu}{2}}(j\mu\omega_0) - n_{\frac{k+\mu}{2}}(j\mu\omega_0)\right\} \right. \right. \\ \left. \left. + b_\mu \operatorname{Re}\left\{n_{\frac{k-\mu}{2}}(j\mu\omega_0) - n_{\frac{k+\mu}{2}}(j\mu\omega_0)\right\} \right]^2 \right\}. \quad (8.25)$$

Mit diesem Ergebnis kann eine numerische Auswertung direkt vorgenommen werden. Neben den FOURIER-Koeffizienten a_μ und b_μ der Nichtlinearität werden dabei die Koeffizientenfunktionen $n_\nu(j\mu\omega_0)$ vom Frequenzgang des periodischen Systems benötigt, die sich als Lösungen eines linearen Gleichungssystems ergeben, vgl. Kapitel 5. Da sowohl die FOURIER-Koeffizienten als auch die Koeffizientenfunktionen im allgemeinen mit zunehmender Ordnung kleiner werden, stellt die zu berücksichtigende Anzahl der Glieder von (8.25) in der Regel kein numerisches Problem dar.

Die zweite Abschätzung der Linearisierungsfehler erhält man schließlich, indem die Definitionen (8.18a,b) mit dem nach (8.25) berechneten quadratischen Mittelwert $\hat{\varepsilon}_2^2(t)$ ausgewertet werden.

Aus der Darstellung (8.24) der 2. Näherung $\hat{\varepsilon}_2(t)$ der Abweichung $\varepsilon(t)$ geht hervor, daß sich $\hat{\varepsilon}_2(t)$ aus harmonischen Schwingungen mit den Kreisfrequenzen $\omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0$ usw. zusammensetzt, wobei ω_0 die Kreisfrequenz der Grundschwingung des nichtlinearen Regelkreises ist. Neben den ungeradzahligten Oberwellen, die hier genauso wie in der 1. Näherung $\hat{\varepsilon}_1(t)$ auftreten, ist in $\hat{\varepsilon}_2(t)$ zusätzlich eine harmonische Komponente mit der Grundfrequenz enthalten. Demnach erfaßt die durch die Tangentennäherung erweiterte Fehlerabschätzung auch eine Abweichung bezüglich der Grundschwingung. Will man sie allein ermitteln, ist in (8.24) die äußere Summe auf $k = \pm 1$ zu beschränken.

Die bei der 1. Näherung $\hat{\varepsilon}_1(t)$ angestellte Betrachtung des durch eine bestimmte Oberwelle hervorgerufenen Verzerrungsgrades erscheint hier wenig sinnvoll, da jede Oberwelle in $\hat{\varepsilon}_2(t)$ von allen FOURIER-Koeffizienten und allen Koeffizientenfunktionen abhängt. Außerdem können die Koeffizientenfunktionen nur numerisch ermittelt werden, so daß sich pauschale Feststellungen, wie z.B. die Abhängigkeit des Verzerrungsgrades von der Lage der Eckfrequenzen des Linearteils, nicht vornehmen lassen. Andererseits stellt der Verzerrungsgrad kein so relevantes Kriterium dar, wenn man berücksichtigt, daß in der Abweichung $\varepsilon(t)$ auch eine harmonische Komponente mit der Grundfrequenz enthalten ist.

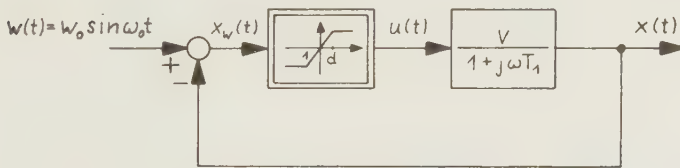
9 ANWENDUNG DER FEHLERABSCHÄTZUNGEN

An konkreten Beispielen werden die beiden Fehlerabschätzungen $\Delta^{(1)}$ und $\Delta^{(2)}$ ermittelt und mit dem exakten Fehler verglichen.

1. Beispiel: Regelkreis mit einem Begrenzer als Nichtlinearität und einem Verzögerungsglied 1. Ordnung als Linearteil.

Zur Kennzeichnung der jeweiligen Signale und Übertragungswerte sind die Blockschaltbilder des nichtlinearen und des harmonisch linearisierten Regelkreises dargestellt, Bild 9.1a,b.

a)



b)

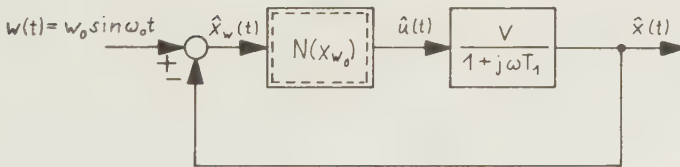


Bild 9.1

Gemäß den Ausführungen des Kapitels 3 erhält man die 1. Näherung $\hat{\varepsilon}_1(t)$ der Abweichung

$$\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

als Ausgangssignal des mit

$$v(t) = f[\hat{x}_w(t)] - N(x_{w_0}) \hat{x}_w(t)$$

erregten Linearteils, Bild 9.2a, während sich die 2. Näherung $\hat{\varepsilon}_2(t)$ bei gleicher Erregung als Ausgangssignal des mit

$$h(t) = \frac{d}{d\hat{x}_w} f[\hat{x}_w(t)]$$

moduliert gegengekoppelten Linearteils ergibt, Bild 9.2b.

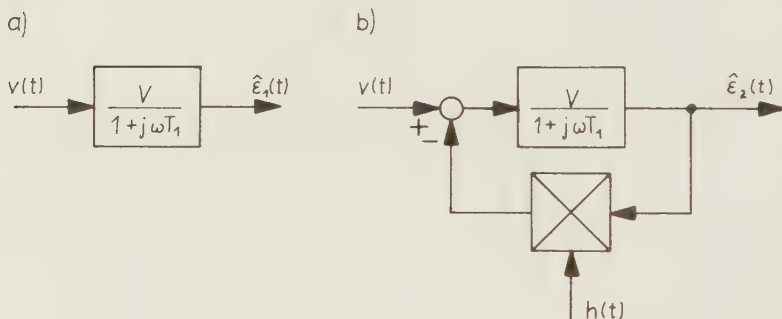


Bild 9.2

Mit der Darstellung von $v(t)$ als trigonometrische Reihe

$$v(t) = \sum_{\substack{\nu = -\infty \\ \nu \neq \pm 1}}^{+\infty} B_{\nu} e^{j\nu\omega_0 t}, \quad (9.1a)$$

worin die Koeffizienten durch

$$B_{\nu} = \frac{1}{T} \int_0^T f[\hat{x}_w(t)] e^{j\nu\omega_0 t} dt \quad (T = \frac{2\pi}{\omega_0}) \quad (9.1b)$$

festgelegt sind, kann die 1. Näherung $\hat{\varepsilon}_1(t)$ durch die Summe

$$\hat{\varepsilon}_1(t) = \sum_{\substack{\nu = -\infty \\ \nu \neq \pm 1}}^{+\infty} F(j\nu\omega_0) B_{\nu} e^{j\nu\omega_0 t} \quad (9.2)$$

angegeben werden. Ist $F_p(j\omega, t)$ der Frequenzgang des mit $h(t)$ moduliert gegengekoppelten Linearteils, so erhält man die 2. Näherung $\hat{\varepsilon}_2(t)$ in analoger Weise zu

$$\hat{\varepsilon}_2(t) = \sum_{\substack{v=-\infty \\ v \neq \pm 1}}^{+\infty} F_p(j\omega, t) \beta_v e^{j v \omega_0 t} \quad (9.3)$$

Für den numerisch zu ermittelnden Frequenzgang $F_p(j\omega, t)$, vgl. Kapitel 5, ist ein Digitalprogramm /28/ erstellt worden. Es benötigt die Koeffizienten aus der Zustandsdarstellung des periodischen Systems in der Regelungsnormalform, die sich zu

$$\dot{q}(t) = -\frac{1}{T_1} \{ 1 + V f'[\bar{x}_w(t)] \} q(t) + v(t) \quad (9.4a)$$

$$\hat{\varepsilon}_2(t) = V q(t) \quad (9.4b)$$

ergibt. Die Zustandsgröße q ist hier lediglich ein Skalar, da der Linearteil nur von 1. Ordnung ist. Das Digitalprogramm benötigt ferner von der parameterverändernden Rechteckfunktion $\hat{h}(t)$ die Kennwerte, wie Tastverhältnis, Periode, Amplituden und Lage der Schaltpunkte, welche sich mit der harmonischen Lösung $\bar{x}_w(t)$ und den Kennwerten der Nichtlinearität an Hand der Tabelle, Bild 4.4, ermitteln lassen.

In dem Digitalprogramm sind ebenfalls die Formeln (8.7) und (8.8) zur Berechnung der 1. Abschätzung $\hat{\Delta}_x^{(1)}$ und $\hat{\Delta}_{x_w}^{(1)}$ und die Formeln (8.18a,b) mit (8.25) zur Berechnung der 2. Abschätzung $\hat{\Delta}_x^{(2)}$ und $\hat{\Delta}_{x_w}^{(2)}$ der Linearisierungsfehler Δ_x und Δ_{x_w} programmiert worden.

Für den vorliegenden Regelkreis wurden nun mit dem Digitalrechner die Fehlerabschätzungen $\hat{\Delta}_{x_w}^{(1)}$ und $\hat{\Delta}_x^{(2)}$ in Abhängigkeit von der

- auf d bezogenen Amplitude $\bar{x}_{w0}/d$ bei $V=50$ und $f=3\text{ Hz}$, Bild 9.3
- Verstärkung V bei $\bar{x}_{w0}/d = 2$ und $f=3\text{ Hz}$, Bild 9.4
- Frequenz f bei $\bar{x}_{w0}/d = 2$ und $V = 10$, Bild 9.5

berechnet, wobei für $v(t)$ die Reihe (9.1a) bis zum 7. Glied berücksichtigt und für die Zeitkonstante T_1 der Wert $T_1 = 1\text{ sec}$ gewählt wurde. Außerdem wurde zur Beurteilung der Fehlerabschätzungen der exakte Fehler

Δ_{x_w} in diesen Darstellungen mit angegeben. Seine Ermittlung erfolgte auf meßtechnischer Grundlage, indem der nichtlineare und der linearisierte Regelkreis am Analogrechner gesteckt und die Signale $x_w(t)$ und $\varepsilon(t)$ in abgetasteter Form dem Digitalrechner zugeführt wurden. Der Digitalrechner berechnete zunächst die quadratischen Mittelwerte $x_w^2(t)$ und $\varepsilon^2(t)$ und anschließend den exakten Fehler Δ_{x_w} .

Betrachtet man die drei Darstellungen, Bild 9.3, 9.4 und 9.5, so erkennt man, daß mit der erweiterten Fehlerabschätzung $\hat{\Delta}_{x_w}^{(2)}$ der tatsächliche Fehler Δ_{x_w} insgesamt gesehen besser als mit der einfachen Fehlerabschätzung $\hat{\Delta}_{x_w}^{(1)}$ erfaßt wird. Die Fehlerabschätzung $\hat{\Delta}_{x_w}^{(2)}$ stimmt bei den Darstellungen in Abhängigkeit von der

—Amplitude bis zu dem untersuchten Wert $x_{w0}/d=5$, Bild 9.3

—Verstärkung bis zu $V \approx 50$, Bild 9.4

—Frequenz oberhalb von $f \approx 0,3$ Hz, Bild 9.5

mit Δ_{x_w} im Rahmen der Meßgenauigkeit überein. Mit weiter zunehmender Verstärkung bzw. weiter abnehmender Frequenz steigt $\hat{\Delta}_{x_w}^{(2)}$ jedoch stärker an als Δ_{x_w} . Die sich dabei ergebende Abweichung $|\Delta_{x_w} - \hat{\Delta}_{x_w}^{(2)}|$ ist bei der noch betrachteten größten Verstärkung von $V_{\max} = 100$ mit ca. 2% verhältnismäßig gering, bei der niedrigsten Frequenz von $f_{\min} = 0,01$ Hz mit ca. 25% dagegen sehr groß. Das Auftreten dieser großen Abweichung ist nicht verwunderlich, wenn man bedenkt, daß Δ_{x_w} bei den niedrigen Frequenzen Werte bis zu 60% annimmt. Bei so großen Werten für Δ_{x_w} ist die Tangentennäherung, worauf die Fehlerschätzung $\hat{\Delta}_{x_w}^{(2)}$ beruht, natürlich längst keine befriedigende Approximation mehr. Diese Fälle wurden deshalb mit untersucht, um die Grenzen dieser Fehlerabschätzung kennenzulernen.

2. Beispiel: Regelkreis mit einer Totzone als Nichtlinearität und einem Ingetrierer mit Verzögerung 1. Ordnung als Linearteil.

Zur Kennzeichnung der jeweiligen Signale und Übertragungswerte sind zunächst wieder die Blockschaltbilder des nichtlinearen und des linearisierten Regelkreises dargestellt, Bild 9.6a,b.

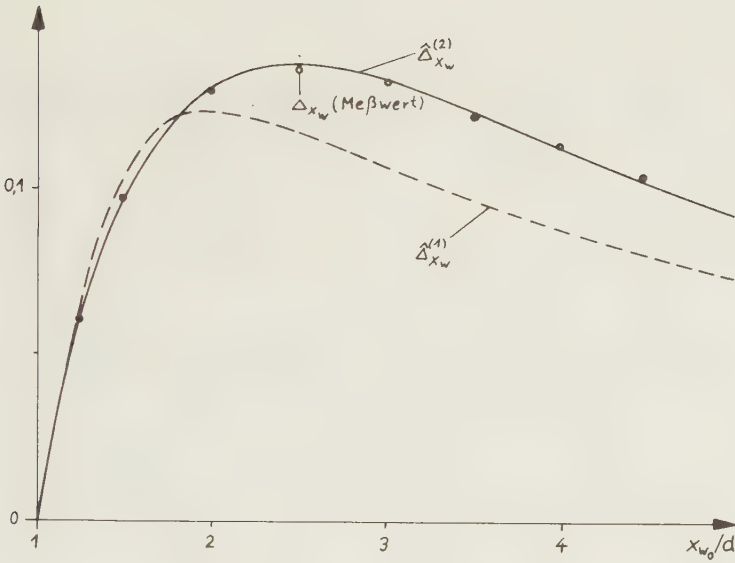


Bild 9.3

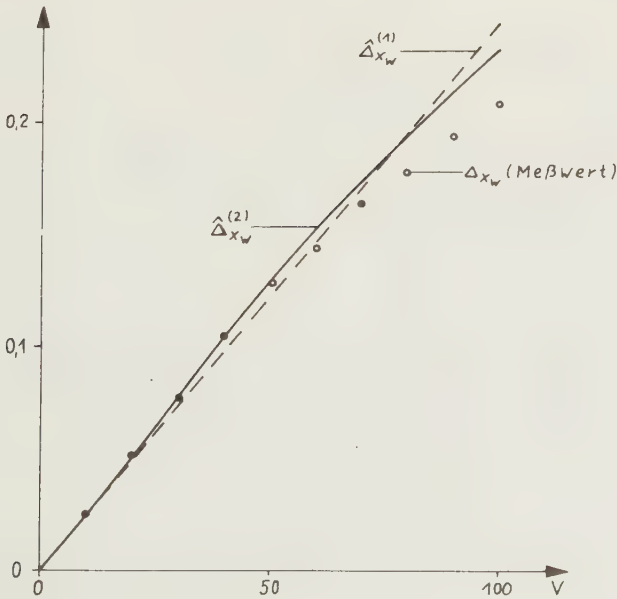
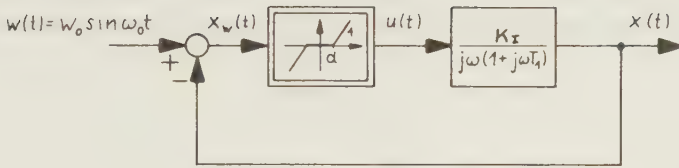


Bild 9.4



Bild 9.5

a)



b)

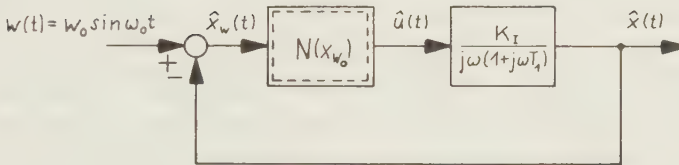


Bild 9.6

Die 1. bzw. 2. Näherung $\hat{\varepsilon}_1(t)$ bzw. $\hat{\varepsilon}_2(t)$ der Abweichung

$$\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

erhält man wieder als Ausgangssignal des Linearteils bzw. des mit

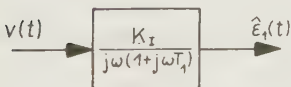
$$h(t) = \frac{d}{d\hat{x}_w} f[\hat{x}_w(t)]$$

moduliert gegengekoppelten Linearteils bei Erregung mit

$$v(t) = f[\hat{x}_w(t)] - N(x_w) \hat{x}_w(t),$$

Bild 9.7a,b.

a)



b)

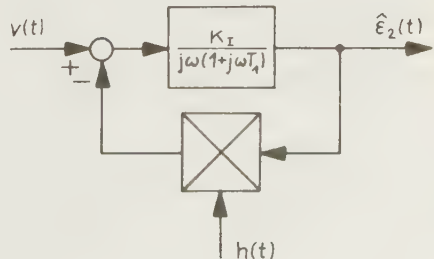


Bild 9.7a,b

Die für die numerische Berechnung erforderliche Zustandsdarstellung in der Regelungsnormalform des moduliert gegengekoppelten Linearteils ergibt sich zu

$$\dot{\underline{q}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K_I}{T_1} h(t) & -\frac{1}{T_1} \end{bmatrix} \underline{q}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t) \quad (9.5a)$$

$$\hat{\underline{e}}_2(t) = \left(\frac{K_I}{T_1}, 0 \right) \underline{q} \quad (9.5b)$$

Mit den Elementen der Systemmatrix, des Beobachtungs- und Steuerungsvektors sowie den Kennwerten der parameterverändernden Rechteckfunktion $\hat{h}(t)$, die sich wieder an Hand der Tabelle, Bild 4.4, ermitteln lassen, als Eingangsdaten des Digitalprogrammes /28/ wurden wie beim 1. Beispiel die Fehlerabschätzungen $\hat{\Delta}_{x_w}^{(1)}$ und $\hat{\Delta}_{x_w}^{(2)}$ in Abhängigkeit von

- der auf d bezogenen Amplitude x_{w0}/d für $T_1 = 1\text{sec}$, $K_I = 10\text{sec}^{-1}$ und $f = 0,2\text{ Hz}$, Bild 9.8
 - dem Integrationswert K_I für $T_1 = 1\text{sec}$, $f = 0,2\text{ Hz}$ und $\bar{x}_{w0}/d = 3$, Bild 9.9
 - der Frequenz f für $T_1 = 1\text{sec}$, $K_I = 1\text{sec}^{-1}$ und $x_{w0}/d = 3$, Bild 9.10
- berechnet. Eine Stabilitätsuntersuchung mußte hier voraus geschickt werden, da das periodische System 2. Ordnung instabil werden kann.

Für die ersten beiden Fälle, d.h. für die x_{w0}/d - und K_I - Abhängigkeit, konnte sie mit Hilfe der Stabilitätskarte, Bild 6.5, vorgenommen werden. Aus ihr ergab sich bei dem 1. Fall mit $a_0^{(1)} = K_I/T_1 = 10\text{sec}^{-2}$ für Tastverhältnisse aus dem Intervall $[0,1; 0,38]$ Instabilität. Aus der Stabilitätskarte geht ferner hervor, daß es sich um eine Instabilität mit der 1. Harmonischen handelt. Infolgedessen treten im Regelkreis bei den entsprechenden Amplitudenwerten Sprungphänomene auf. Transformiert man das Intervall mit der Beziehung

$$\frac{x_{w0}}{d} = \frac{1}{\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{T_1}{T_p}\right)\right]} \quad (9.6)$$

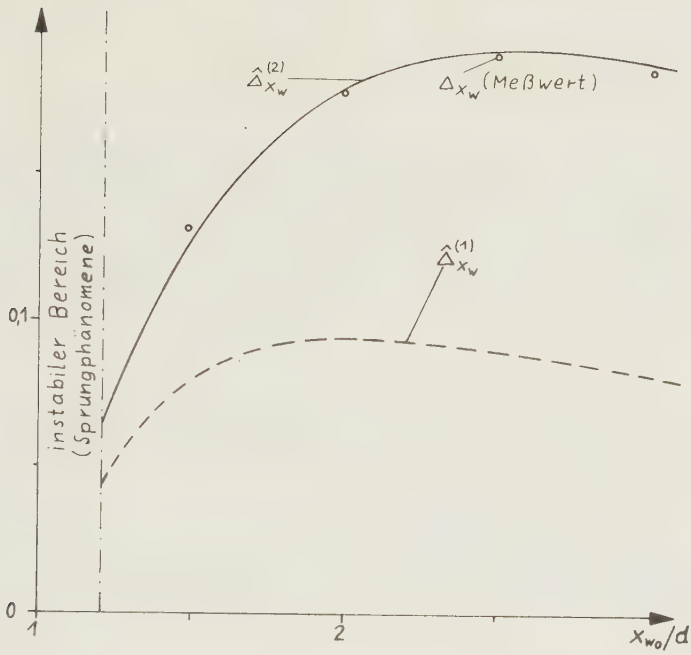


Bild 9.8

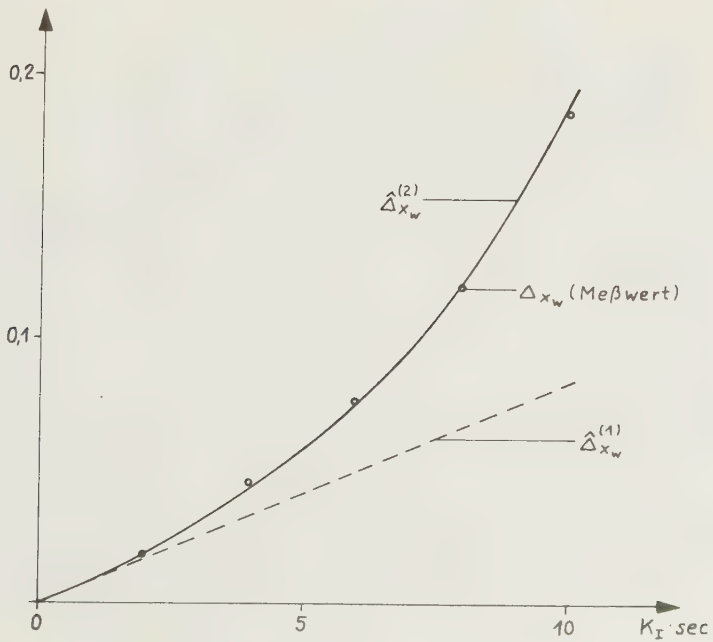


Bild 9.9

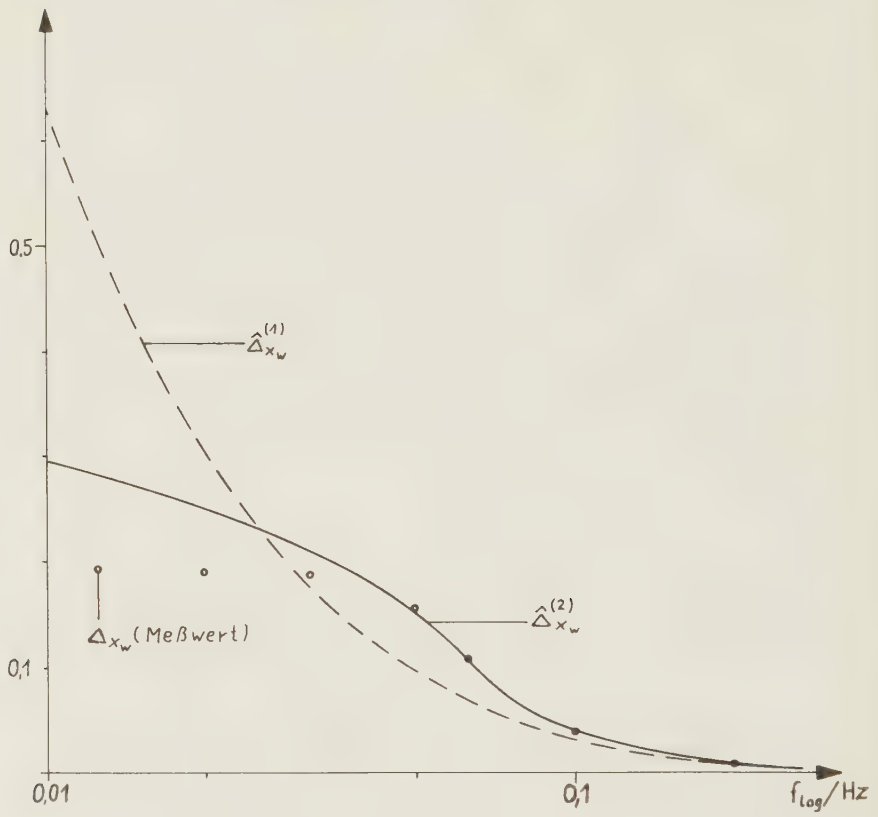


Bild 9.10

die der Tabelle, Bild 4.4, für die Totzone zu entnehmen ist, in den auf d bezogenen Amplitudenbereich x_{w0}/d , so ergibt sich das Intervall $[1,01; 1,21]$, Bild 9.8. Im 2. Fall wird bei $x_{w0}/d = 3$, was einem Tastverhältnis von $\tau_1/T_p = 0,783$ entspricht, der Integrationsbeiwert K_I variiert. Aus der Stabilitätskarte, Bild 6.5, geht hervor, daß mit steigenden K_I -Werten die erste Instabilität bei

$$K_I \approx 33 \text{ sec}^{-1}$$

auftritt. Da die Fehlerabschätzungen aber nur bis zu $K_I = 10 \text{ sec}^{-1}$ berechnet werden, vgl. Bild 9.9, ist hier der gesamte betrachtete Bereich stabil.

Im 3. Fall bei der Frequenzabhängigkeit kann die Stabilitätsfrage mit Hilfe des Kriteriums von BROCKET, vgl. Kapitel 6, beantwortet werden. Für den gewählten Integrationsbeiwert $K_I = 1 \text{ sec}^{-1}$ und die Zeitkonstante $T_1 = 1 \text{ sec}$ ist

$$K_I < 2,9 \frac{1}{T_1} ,$$

wodurch nach BROCKET gemäß (6.37) Stabilität gewährleistet ist.

Betrachtet man die drei Darstellungen, Bild 9.8, 9.9 und 9.10, so erkennt man, daß mit der erweiterten Fehlerabschätzung $\hat{\Delta}_{x_w}^{(2)}$ auch bei diesem Beispiel der exakte Fehler Δ_{x_w} deutlich besser als mit der einfachen Fehlerabschätzung $\hat{\Delta}_{x_w}^{(1)}$ wiedergegeben wird. Bei den Darstellungen in Abhängigkeit von der Aussteuerung x_{w0}/d und dem Integrationsbeiwert K_I besteht Übereinstimmung zwischen $\hat{\Delta}_{x_w}^{(2)}$ und Δ_{x_w} im Rahmen der Meßgenauigkeit von Δ_{x_w} , während $\hat{\Delta}_{x_w}^{(1)}$ nur unterhalb von $K_I \approx 2 \text{ sec}^{-1}$ befriedigende Werte liefert. In Abhängigkeit von der Frequenz f stimmt $\hat{\Delta}_{x_w}^{(2)}$ oberhalb von 0,05 Hz und $\hat{\Delta}_{x_w}^{(1)}$ oberhalb von 0,1 Hz gut mit dem exakten Fehler Δ_{x_w} überein. Zu niedrigen Frequenzen hin geht der exakte Fehler in den konstanten Wert $\Delta_{x_w} \approx 0,2$ über. Während die 1. Fehlerabschätzung mit kleiner werdender Frequenz progressiv ansteigt und sich dabei erheblich von dem exakten Fehler entfernt, nimmt dagegen die 2. Fehlerabschätzung wie Δ_{x_w} unterhalb von $f \approx 0,06 \text{ Hz}$ einen Verlauf mit abnehmender Steigung an und weicht dadurch wesentlich geringer als $\hat{\Delta}_{x_w}^{(1)}$ von dem exakten Fehlerverlauf ab. Trotzdem ist $\hat{\Delta}_{x_w}^{(2)}$ bei

niedrigen Frequenzen noch deutlich größer als Δ_{x_w} . Das liegt sicher einerseits darin begründet, daß dort wegen $\Delta_{x_w} \approx 0,2$ ein verhältnismäßig großes Differenzsignal $\varepsilon(t)$ vorliegt und die Tangentennäherung nicht mehr das wirkliche Übertragungsverhalten wiedergibt. Der alleinige Grund kann das aber nicht sein; denn auch bei großer Aussteuerung und großen Integrationsbeiwerten ist $\Delta_{x_w} \approx 0,2$, ohne daß $\hat{\Delta}_{x_w}^{(2)}$ dadurch nennenswert von Δ_{x_w} abweicht. Man darf annehmen, daß auch die Dynamik des periodischen Systems einen Einfluß darauf hat, wie stark sich der bei der Tangentennäherung unberücksichtigt gebliebene Rest der TAYLORreihe, vgl. Kapitel 3, auf $\hat{\varepsilon}_2(t)$ und damit auf $\hat{\Delta}_{x_w}^{(2)}$ auswirkt. Eine analytische Abschätzung dieses Einflusses erscheint jedoch nicht möglich. Experimentelle Untersuchungen würden vermutlich über die behandelten Beispiele hinaus wegen der nichtlinearen Rückwirkung keine allgemeingültigen Regeln ergeben, weshalb davon abgesehen wurde.

10 ZUSAMMENFASSUNG

Die Behandlung des harmonisch linearisierten Regelkreises ergibt harmonische Näherungen der Signale des nichtlinearen Regelkreises. Es stellt sich daher die Frage nach dem Fehler dieser Näherungen.

Die Signale des nichtlinearen Regelkreises enthalten im allgemeinen Oberwellen, die am Eingang der Nichtlinearität bewirken, daß ihr Übertragungsverhalten von der Beschreibungsfunktion nicht richtig gekennzeichnet wird, weil sie für harmonische Erregung definiert ist. Dadurch weichen die Signale des nichtlinearen Regelkreises nicht nur mit den Oberwellen, sondern in deren Folge auch mit ihrer Grundschiwingung von den harmonischen Lösungen ab. Um den Linearisierungsfehler klein zu halten, wird bisher gefordert, daß der Linearteil die Oberwellen "herausfiltert". Dieser Forderung liegt eine Bestimmung der Oberwellen zugrunde, bei der von ihrem Entstehen am Ausgang der Nichtlinearität ausgegangen und eine Rückwirkung über die Nichtlinearität vernachlässigt wird, was teilweise zu unbefriedigenden Ergebnissen führt.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Ermittlung des Fehlers der harmonischen Näherungen vorgenommen, bei der in Erweiterung zu der bisherigen Abschätzung

- die Rückwirkung über die Nichtlinearität berücksichtigt und
- neben den Oberwellen auch die Abweichung von der Grundschiwingung erfaßt wird.

Die Abweichung $\varepsilon(t)$ zwischen den Regelgrößen des nichtlinearen und harmonisch linearisierten Regelkreises ergibt sich dann als Ausgangssignal des nun gegengekoppelten Linearteils bei Erregung mit den Oberwellen der Nichtlinearität. Die Gegenkopplung kennzeichnet die Rückwirkung von $\varepsilon(t)$ über die Nichtlinearität, wobei deren Übertragungsverhalten durch die Tangentensteigung $f'(\tilde{x}_w)$ in den von der harmonischen Regelabweichung $\tilde{x}_w(t)$ ausgesteuerten Punkten der nichtlinearen Kennlinie $f(\tilde{x}_w)$ beschrieben wird. Wegen der Tangentennäherung muß sich diese Fehlerermittlung auf Nichtlinearitäten mit differenzierbarer Kennlinie beschränken, die außerdem noch nullpunktsymmetrisch sein soll.

Der mit $f'[\tilde{x}_w(t)]$ moduliert gegengekoppelte Linearteil ist ein periodisch zeitvariantes System. Seine Systemmatrix ist periodisch mit der

Periode T_p , die halb so groß wie die Periode von $\bar{x}_w(t)$ ist. Das Übertragungsverhalten des periodischen Systems kann wie bei zeitinvarianten Systemen durch einen Frequenzgang gekennzeichnet werden, der jedoch zusätzlich periodisch von der Zeit abhängt. Die Zeitabhängigkeit wird durch eine trigonometrische Reihe beschrieben, deren frequenzabhängige Koeffizienten sich als Lösungen eines linearen Gleichungssystems ergeben. Dafür werden die FOURIER-Koeffizienten der parameterverändernden Funktion $f'[\bar{x}_w(t)]$ benötigt, die man näherungsweise als Rechteckschwingung darstellen kann, wenn sich die Kennlinie der Nichtlinearität durch einen Polygonzug approximieren läßt.

Durch die zeitvariante Rückführung kann der gegengekoppelte Linearteil instabil werden, weshalb eine Stabilitätsuntersuchung vorgenommen werden muß. Stabilität ist dann gewährleistet, wenn die Eigenwerte der Übergangsmatrix $\Phi(t_0 + T_p, t_0)$ des periodischen Systems im Einheitskreis liegen. Vereinfachend wirkt sich aus, daß das periodische System stückweise als konstant betrachtet wird; denn dadurch gewinnt man seine Übergangsmatrix als Produkt von Übergangsmatrizen zeitinvarianter Systeme.

Eine Instabilität des gegengekoppelten Linearteils bedeutet gleichzeitig, daß die betrachtete Lösung des nichtlinearen Regelkreises sich nicht stabil einstellt. Mit der Kenntnis der Eigenbewegung dieses periodischen Systems bei Instabilität ist es ferner möglich, auf bestimmte nichtlineare Phänomene des fremderregten Regelkreises zu schließen, worauf bei Regelkreisen mit einem Linearteil 2. Ordnung näher eingegangen wird.

Für das periodische System 2. Ordnung werden daher in Abhängigkeit vom Tastverhältnis, das im direkten Zusammenhang mit der Aussteuerung der Nichtlinearität steht, sowie für verschiedene Amplituden und Perioden der parameterverändernden Rechteckfunktion die instabilen Bereiche ermittelt und auf Stabilitätskarten dargestellt. Außerdem werden die Perioden der periodischen Komponenten bei den aufklingenden Schwingungen in den verschiedenen instabilen Bereichen bestimmt. Dabei gelingt die allgemeine Feststellung, daß mit zunehmendem Tastverhältnis bei den aufeinander folgenden instabilen Gebieten sich die Perioden $2T_p$ und T_p abwechseln und daß im ersten instabilen Bereich die 1. Harmonische und in den folgenden Bereichen jeweils die nächst höhere Harmonische dominiert.

Demnach ergeben sich in den verschiedenen instabilen Gebieten des zeitabhängig gegengekoppelten Linearteils Harmonische mit der Frequenz der Grundschiwingung des Regelkreises sowie mit ganzzahlig Vielfachen dieser Grundfrequenz. Diese Harmonischen klingen dann auch im nichtlinearen Regelkreis bei den entsprechenden Aussteuerungen auf. Eine Instabilität mit der 1. Harmonischen, d.h. mit der Grundschiwingung, löst Sprungphänomene aus, und eine Instabilität mit einer ungeradzahlig höheren Harmonischen bewirkt eine sprunghafte Änderung dieser Harmonischen im Regelkreis. Die instabilen Gebiete mit geradzahlig Harmonischen deuten darauf hin, daß auch geradzahlige Oberwellen im Regelkreis auftreten, was für eine 2. Harmonische experimentell überprüft wird. Damit muß der verbreiteten Auffassung widersprochen werden, daß in nichtlinearen Regelkreisen nur ungeradzahlige Oberwellen auftreten, wenn die Nichtlinearität eine nullpunktsymmetrische Kennlinie besitzt.

Der Fehler der harmonischen Linearisierung wird als Verhältnis des Effektivwertes der Abweichung ε zum Effektivwert des betrachteten Signals im Regelkreis definiert. Für die mit der Tangentennäherung erweiterte Fehlerabschätzung werden Beziehungen hergeleitet, die sich unmittelbar numerisch auswerten lassen. An zwei Beispielen wird gezeigt, daß die hier dargestellte Fehlerermittlung den exakten Fehler wesentlich besser erfaßt als die bisherige Bestimmung. Bei großen Fehlern kann auch diese erweiterte Abschätzung ungenau werden, weil dann die Rückwirkung über die Nichtlinearität mit der Tangentennäherung nicht mehr befriedigend gekennzeichnet wird.

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 KRYLOW, N.; BOGOLJUBOW, N: "Einführung in die nichtlineare Mechanik". Kiew (1937). Auszugsweise Übersetzung des russischen Werkes in englischer Sprache: Princeton (1949).
- 2 GOLDFARB, L.S.: "Über einige Nichtlinearitäten in Regelkreisen". Automatika i Telemechanika (Russ.), Band 8 (1947). Übersetzung in englischer Sprache: "Frequency Response". Ed.R.Oldenburger, The Macmillan Co., New York (1956), S. 239-259.
- 3 KOCHENBURGER, R., J.: "A Frequency Response Method for Analysing and Synthesizing Contactor Servomechanisms". AIEE Transactions, Volume 69 (1950) pp. 270 - 284.
- 4 SCHLITT, H.: "Stochastische Vorgänge in linearen und nichtlinearen Regelkreisen". Vieweg Verlag, Braunschweig 1968.
- 5 FÖLLINGER, O.: "Nichtlineare Regelungen I". R. Oldenbourg Verlag, München Wien, 2. Auflage, 1978.
- 6 OPPELT, W.: "Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge". Verlag Chemie, Weinheim, 5. Auflage, 1972.
- 7 LEVINSON, E.: "Some Saturation Phenomena in Servomechanisms with Emphasis on the Tachometer Stabilized System". Trans. A./E.E. Vol. 72, pt II (1953) pp. 1 - 9.
- 8 WEDLAKE, W.E.: "On the Closed Loop Response of Nonlinear Control Systems". Ph.D. dissertation, Illinois Institute of Technology, Chicago 1969.
- 9 GIBSON, J.E.: "Nonlinear Automatic Control". McGraw-Hill Book Company, New York 1963.
- 10 POPOW, P; PALTOW, J.: "Näherungsmethoden zur Untersuchung Nichtlinearer Regelungssysteme". Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1963.
- 11 SILJAK, D.: "Nonlinear Systems". John Wiley & Sons, Inc., New York 1969.

- 12 UNBEHAUEN, R.: "Bestimmung der Übertragungsfunktion linearer Systeme mit sich periodisch ändernden Parametern". A.E.O., Band 23 (1969), Heft 10, S. 516 - 520.
- 13 UNBEHAUEN, R.: "Systemtheorie". R. Oldenbourg Verlag, München, 2. Auflage, 1971.
- 14 ZURMOHL, R.: "Matrizen". Springer-Verlag, Berlin, 4. Auflage, 1964.
- 15 KREMER, H.: "Ein einfaches algebraisches Stabilitätskriterium für lineare Systeme". Frequenz 26 (1972), S. 249 - 252.
- 16 FORSTER, U.; UNBEHAUEN, R.: "Zur Stabilitätsprüfung bei diskontinuierlichen oder periodisch zeitvarianten linearen Systemen". Arch. f. Elektrotechn., Bd. 56 (1974), H. 1, S. 45-49.
- 17 COHN, A.: "Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreis". Mathem. Z. 14 (1922), S. 110 - 148.
- 18 UNBEHAUEN, R.: "Ein Verfahren zur Stabilitätsprüfung periodisch zeitvarianter linearer Systeme". Buletinul Institutului Politehnic DIN IASI, TOMUL XIX(XXIII), fasc. 3-4, 1973, Sectia III S. 127 - 139.
- 19 COLLATZ, L.: "Differentialgleichungen". B.G. Teubner, Stuttgart 1969.
- 20 BROCKET; R.W.: "Variational Methods for Stability of Periodic Equations" in "Differential Equations and Dynamical Systems" (Hrsg. Hale, J. and La-Salle, J.P.). Academic Press, New York 1967, pp. 299 - 308.
- 21 KAUDERER, H.: "Nichtlineare Mechanik". Springer-Verlag, Berlin 1958.
- 22 KLEIN, R.: "Stabilitätsuntersuchung bei speziell parametererregten Systemen". Diplomarbeit, IRT der Universität Erlangen (1978), vom Verfasser betreut.
- 23 STOKER, J.J.: "Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems". Interscience Publishers, New York, 5. Auflage, 1963.
- 24 HAYASHI, C.: "Nonlinear Oscillations in Physical Systems". McGraw-Hill Book Company, New York 1964.

- 25 WEST, J.C.: "Analytical Techniques for Non-Linear Control Systems".
The English Universities Press Ltd., London 1960.
- 26 WEST, J.C.; DOUCE J.L.; LIVESLEY, R.K.:
"The Dual-Input Describing Function and its Use in the Analysis
of Non-Linear Feedback Systems".
Proc IEE (London), vol. 103 (1956), pt. B pp. 463 - 474.
- 27 GELB, A.; VAN DER VELDE, W.E.: "Multiple-Input Describing Functions
and Nonlinear System Design".
McGraw-Hill Book Company, New York 1968.
- 28 DOTTERWEICH, G.: "Analyse bestimmter periodisch parametererreg-
ter Systeme". Diplomarbeit, IRT Universität Erlangen (1977),
vom Verfasser betreut.

L e b e n s l a u f

Persönliches

Lutz Lambert, geboren am 21.11.1941 in Hamburg.

Eltern: Hans Gerhard Lambert, Diplom-Ingenieur,

Ruth Lambert, geb. Kahlau.

Seit 1972 verheiratet mit Gabriele Betz.

Schule und Lehre

1948 - 1957 Volksschule in Hamburg und Kiel

1957 - 1960 Lehre als Elektroinstallateur bei der
"Kieler Howaldtswerke AG".

1957 - 1960 Abendlehrgang zur Erlangung der "Fachschulreife".

1960 - 1961 Berufstätigkeit als Elektroinstallateur bei der
Lehrfirma.

Fachhochschul-Studium

1961 - 1964 Elektrotechnik an der "Staatlichen Ingenieurschule Kiel".
Ingenieurexamen mit "Fakultätsreife".

Ingenieurpraxis

1964 - 1968 Im Entwicklungslabor für Trägerfrequenz-Übertragungs-
systeme der Firma "TE KA DE Felten & Guillaume Fernmelde-
anlagen" in Nürnberg.

Hochschul-Studium

WS 68/69 - SS 73 Elektrotechnik an der Universität Erlangen-Nürnberg.
Studienarbeit am Institut für Technische Elektronik,
Diplomarbeit am Institut für Regelungstechnik.
Nebenbei Tätigkeit als Hilfsassistent an den Instituten
für Nachrichtentechnik, Datenverarbeitung und Regelungstechnik.

Wissenschaftliche Tätigkeit

1973 - Wissenschaftlicher Assistent am Institut für Regelungstechnik
der Universität Erlangen-Nürnberg.

Copy-Center 2000

852 ERLANGEN · Obere Karlstr. 30
Tel. 09131-26197